ユースフル労働統計

補注

2014 年 11 月

「ユースフル労働統計 2014」本文には掲載していない技術的な説明です。微積分の記号を使った説明もありますが、微分可能性のような数学的な厳密性にまでは言及していません。

（クリックすると該当箇所に移動します。）

（独）労働政策研究・研修機構（JILPT）

補注１　労働投入量のディビジア指数（本文 3.2）

労働投入量のディビジア指数は、賃金率の異なる複数の種類から成る労働全体の労働投入量の動きに関する指数である。それぞれの労働投入量の単純な合計の動きではなく、労働投入量に変化のあった労働の賃金率の高低も反映する動きとなるように作られる[1]。

今、労働の種類が n 種類から成るとし、それぞれの賃金率（1 人 1 時間当たりの賃金）を$w_1, \cdots, w_n$、労働投入量（延べ労働時間数）を $L_1, \cdots, L_n$と置く。本文では、1 時間当たりの所定内給与額がここでいう賃金率に相当し、6 月 1 か月間の延べ所定内労働時間数がここでいう労働投入量に相当する。また、本文は、労働をフルタイム労働とパートタイム労働に分け、それぞれをさらに、性、学齢、年齢階級、勤続年数階級の別でグループ分けしているが、これらがここでいう労働の種類である。

（指数の性質）

労働投入量のディビジア指数Dは、次のⅠとⅡを満たすように作られる。

Ⅰ　労働投入量が 1 単位増えたときのディビジア指数の増分は、労働投入量が増えた労働の賃金率に比例する。記号で書くと、kを労働の種類として、ディビジア指数の偏微分係数$\partial D/\partial L_k$と賃金率w_kとは、比例定数を$1/\omega$として、

$$\frac{\partial D}{\partial L_k} = \frac{1}{\omega} w_k \qquad (k = 1, \cdots, n) \qquad ①$$

の関係にある。比例定数$1/\omega$は、労働の種類kによらない。これは、労働の種類iとj（$i, j = 1, \cdots, n$）の各組合せについて、D の L_iに関する偏微分係数$\partial D/\partial L_i$と、L_jに関する偏微分係数$\partial D/\partial L_j$の比は、賃金率の比 w_i/w_jに等しいということでもある。

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial L_i}}{\frac{\partial D}{\partial L_j}} = \frac{w_i}{w_j} \qquad i, j = 1, \cdots, n \qquad ②$$

たとえば、同じ労働投入量の変化でも、賃金率が倍の労働の種類で生じた場合は、ディビジア指数の変化は２倍となる。

Ⅱ　さらに、D は$L_1, \cdots, L_n$に関し一次同次である。すなわち、aを任意の正の実数として、$L_1, \cdots, L_n$を一斉にa倍すると、D もa倍となる。

$$D(aL_1, \cdots, aL_n) = aL(L_1, \cdots, L_n)$$

これは、すべての生産要素が一斉にa倍になれば生産量もa倍になるという生産関数についてしばしば想定される仮定を、$L_1, \cdots, L_n$の関数 Dにも当てはめたものである。それぞれの労働の種類において、労働投入量が同じ率で増減するとき、言い換えると、労働投入量の構成比が変わらないときは、ディビジア指数の増減率は、労働投入量の増減率と同じということになる。

一次同次の関数は、aを任意の正の実数として$D(aL_1, \cdots, aL_n) = aL(L_1, \cdots, L_n)$であるから、両辺を$a$で微分し、$a$を 1 と置くことで、

[1] この補注は、ユースフル労働統計で作る労働投入量のディビジア指数に関する記述で、ディビジア指数一般についてのものではありません。

$$D(L_1,\cdots,L_n)=\frac{\partial D}{\partial L_1}L_1+\cdots+\frac{\partial D}{\partial L_n}L_n \qquad ③$$

が成り立つ（一次同次式に関するオイラーの定理)。

等式③の右辺は、①の関係を使うと、

$$D(L_1,\cdots,L_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{\omega}L_k=\frac{C}{\omega} \qquad (k=1,\ldots,n) \qquad ④$$

ここで C は、$w_1L_1+\cdots+w_nL_n$を C と置いたもので、労働の総賃金コストである。①の比例定数ωと総賃金コスト Cとは、

$$C=\omega D$$

の関係がある。

（増減率）

ここで、各労働の種類の労働投入量$L_1,\cdots,L_n$が時間の経過とともに変化した場合に、ディビジア指数$D(L_1,\cdots,L_n)$がどのように変化するかみる。その結果を利用して、各労働の種類における労働投入量の変化から、ⅠとⅡを満たすようなディビジア指数を構成する。

$D(L_1,\cdots,L_n)$の各変数 $L_1,\cdots,L_n$を、時間の経過と共に変化する関数と考え、$D(L_1,\cdots,L_n)$を t で微分すると、

$$\frac{dD}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial D}{\partial L_k}\cdot\frac{dL_k}{dt}$$

（$w_1,\cdots,w_n$は時点tの関数とは考えない）となる。①と④を使って右辺を変形する。

$$\frac{dD}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial D}{\partial L_k}\cdot\frac{dL_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{\omega}\cdot\frac{dL_k}{dt}=D\sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C}\cdot\frac{dL_k}{dt}\Big/L_k$$

すなわち

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D}=\sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C}\cdot\frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k} \qquad ⑤$$

となる。

これは、ディビジア指数$D(L_1,\cdots,L_n)$の満たすべき時点tに関する微分方程式となっている。左辺はディビジア指数の増減率に相当する。右辺の(dL_k/dt)／L_kは、労働の種類kの労働投入量L_k（k＝$1,\ldots,n$）の増減率である。ディビジア指数は、各労働の種類の労働投入量の増減率(dL_k/dt)／L_k（k＝$1,\ldots,n$）を、当該労働の種類kの賃金コストw_kL_kが総賃金コスト$C=w_1L_1+\cdots+w_nL_n$に占める割合で加重平均したもので増減することを、この⑤式は示している。

この⑤式を利用して、ディビジア指数を作成する。

（単純な労働投入量との関係）

次に、ディビジア指数の増減率と、各労働の種類の労働投入量の単純な合計の増減率との関係をみる。

労働投入量の単純な合計を L、各労働の種類の労働投入量の構成比を b_k と置く。

$$L = L_1 + \cdots + L_n \qquad L_k = Lb_k$$

である。$L_k = Lb_k$の両辺をtで微分すると、

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{dL}{dt}b_k + L\frac{db_k}{dt}$$

これを⑤の右辺に代入する。$L_k = Lb_k$であること、C＝$w_1L_1 + \cdots + w_nL_n$で、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C} = 1$$

であることに注意して整理すると、⑤は次のとおりとなる。

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} = \sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C}\cdot\frac{\frac{db_k}{dt}}{b_k} + \frac{\frac{dL}{dt}}{L} \qquad ⑥$$

この式から、ディビジア指数の増減率は、次の二つの合計であることがわかる。

ⅰ　右辺第 1 項　各労働の種類の構成比の増減率(db_k/dt)／b_kを、当該労働の種類の賃金コストの総賃金コストに占める割合w_kL_k/Cで加重平均したもの

ⅱ　右辺第 2 項　労働投入量の単純な合計Lの増減率

ⅰが、ディビジア指数の増減率と、労働投入の単純な合計Lの増減率との差で、本文で「労働の質の変化率」と呼ぶ部分に相当する。

（賃金率の高低との関係）

ディビジア指数の増減率と、各労働の種類の賃金率$w_1, \cdots, w_n$の高低との関係がわかるように、この⑥式をさらに変更する。賃金率$w_1, \cdots, w_n$の加重平均をwと置く。全労働者の平均賃金率である。

$$w = (w_1L_1 + \cdots + w_nL_n)/(L_1 + \cdots + L_n)$$

であって、総賃金コストCや労働投入の単純な合計Lとの間には、

$$w = \frac{C}{L} \qquad C = wL$$

という関係にある。

構成比$b_1, \cdots, b_n$は合計 1 であるから、各構成比を時点tで微分した微分係数の合計は 0 であること、すなわち、

$$\frac{db_1}{dt} + \cdots\cdots + \frac{db_n}{dt} = 0$$

これと賃金率$w_1, \cdots, w_n$の加重平均wを使うと、⑥は次の⑦に変形できる。

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(w_k - w)L_k}{C}\cdot\frac{\frac{db_k}{dt}}{b_k} + \frac{\frac{dL}{dt}}{L} \qquad ⑦$$

これから、右辺第1項の正負、つまり労働の質の変化率と呼ぶものの正負は、各労働の種類の賃金率w_kと

全体の平均賃金率wの大小関係や、労働の投入量の構成比の増減率(db_k/dt)／b_kの大きさなどによって決まることがわかる。特に、

・賃金率w_kが全体の平均wより高い労働の労働投入量の構成比が上昇（$db_k/dt > 0$）し、

・賃金率w_kが全体の平均wより低い労働の労働投入量の構成比が低下（$db_k/dt < 0$）するとき、

右辺の第1項が正となり、労働の質の変化率と呼ぶ値が正で、労働の質が上昇することがわかる。

また、賃金率が労働の種類に依らない、つまり各kで$w_k = w$のときは、右辺第1項は0で、ディビジア指数の増減率は労働投入量全体の増減率と同じとなることもわかる。

（実際の計算）

実際の計算に用いる資料は、賃金構造基本統計調査等による一般労働者と短時間労働者の統計である。労働投入量は6月分の延べ所定内労働時間数、賃金率は6月分の時間当たり所定内給与額である。

⑤又は⑥のような時点tの微分方程式を、1年に1回の特定月の統計に当てはめなくてはならない。

tを年単位の連続変数と考え、⑤を時点t年から$t+1$年まで積分する。

$$\int_t^{t+1} \frac{\frac{dD}{dt}}{D} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k} dt$$

$$\ln\left(D(t+1)\right) - ln\left(D(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k} dt \qquad ⑧$$

ここでlnは自然対数関数である。

右辺のΣの中の各項は、積分形の平均値の定理から、0以上1以下のあるθ_kがあって、$t+\theta_k$における

$$\frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k}$$

の値に等しいが、これを、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_k L_k}{C}(t+1) + \frac{w_k L_k}{C}(t)\right) \times \left(ln\left(L_k(t+1)\right) - ln(L_k(t))\right)$$

で近似することにする。すなわち、各労働の種類の

賃金コストの割合の前年との平均×労働投入量の対数値の前年差

の合計を、ディビジア指数の対数値の前年差とする。賃金コストの割合の前年との平均をウェイトとした、各労働の種類の労働投入量の対数値の前年差の加重平均である。賃金率 $w_1, \cdots, w_n$ は、時点tの関数ではないとして⑤を導いたが、年間の変化を近似的に求めるこの計算過程で、賃金コストの割合の経年変化からも影響を受けることになる。

最後に、ディビジア指数の対数値の前年差に指数関数を施して増減率とし、特定年（2000 年）を 100 として、その増減率を累積したものが、各年のディビジア指数である。

補注２　失業継続期間と失業頻度（本文 7.6）－失業のフロー分析－

１　労働力調査結果「今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口」の補正

総務省「労働力調査」基本集計にある今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口から就業状態の変化を示す行列を計算する際に補正を加える。以下、その補正の趣旨と方法を説明する。

説明は、2013 年 1 月分の男性の統計を例にして行う。なお、補正は、男女計、男性、女性のそれぞれ、各月ごとに行う。

今月及び前月の就業状態別 15 歳以上人口は、総務省「労働力調査」2013 年 1 月分基本集計で言えば、第Ⅰ－7 表「今月及び前月の就業状態・農林業・非農林業・従業上の地位・雇用形態（非農林業雇用者については従業者規模），年齢階級別 15 歳以上人口」にある統計である。この表は「政府統計の総合窓口（e-Stat）」でみることができる。この基本集計第Ⅰ－7 表の全産業、男性部分から所要の統計をピックアップしたものが、下表の黒字の数字である。下表は、表頭が前月末 1 週間における就業状態、表側が今月末 1 週間の就業状態である。前月末と今月末の就業状態の組合せの別に、同一個人の前月分調査票と今月分調査票が集計されたものである。

2013 年 1 月分の基本集計第Ⅰ－7 表の値、
2013 年 1 月分と 2012 年 12 月分の基本集計第Ⅰ－1 表の値（赤字）
（全産業、男性、単位：万人）

		前月末1週間 ／ 今月末1週間	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				前月末1週間の就業状態								
			今月分調査結果※	総数	前月いた15歳以上人口	労働力人口	就業者	完全失業者	非労働力人口	就業状態不詳	前月14歳で今月15歳の者	前月いなかった者（転入）
0		前月分調査結果※			5352	3742	3582	161	1608			
1	今月末一週間の就業状態	総数		5383	5242	3662	3493	168	1579	2	3	138
2		今月いた 15 歳以上人口	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	138
3		労働力人口	3753	3735	3632	3591	3439	152	41	0	0	103
4		就業者	3581	3551	3453	3429	3419	10	23	0	0	99
5		完全失業者	172	184	180	162	20	142	18	0	0	4
6		非労働力人口	1595	1615	1577	52	38	14	1524	0	3	35
7		就業状態不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8		前月いて今月いなかった者（転出その他）		32	32	19	16	3	13	0	0	0

出所　総務省「労働力調査」（基本集計）

また、上の表の赤字の数字は、左側の縦の列が 2013 年 1 月分基本集計第Ⅰ－1 表「就業状態・従業上の地位・雇用形態（雇用者については従業者規模）・農林業・非農林業別 15 歳以上人口」にある 15 歳

以上人口とその内訳で、上部の横の行が 2012 年 12 月分の同じ基本集計第Ⅰ－1 表にある 15 歳以上人口とその内訳である。表側の就業者についてみると、今月末が就業者である者は、前月末において就業者、完全失業者、非労働力、前月 14 歳であった、（国内に）いなかった、などの別に分かれるが、その総数は基本集計第Ⅰ－7 表では 3551 万人とされている。しかし、基本集計第Ⅰ－1 表では赤字の 3581 万人である。

このように数字が異なるのは、基本集計第Ⅰ－7 表が、前月と今月の両方で調査対象となった（調査票が揃っている）世帯に限って集計、復元したものであるためである。2013 年 1 月分で言えば、2013 年 1 月分の基本集計第Ⅰ－7 表は、集計対象が 2012 年 12 月分調査の調査対象と共通になっている世帯に限ってあり、調査対象全体を使って集計、復元した基本集計第Ⅰ－1 表等の数字と必ずしも一致しない（15 歳以上人口は別に行われている「人口推計」と一致するように復元するので一致する。）。

労働力調査による各月の 15 歳以上人口とその内訳は、調査対象全体を使って集計、復元した基本集計第Ⅰ－1 表の数字が使われるのが普通である。以下、こちらの数字のことを‘公表値’と呼ぶことにする。基本集計第Ⅰ－7 表も公表値であるが、本補注では説明の便宜上、基本集計第Ⅰ－1 表の方の数字を公表値と呼ぶことにする。

この公表値と、就業状態の変化を示す行列が示す前月分と今月分の就業者数、完全失業者数、非労働力人口が可能な限り一致するように、基本集計第Ⅰ－7 表の数字の補正を施す。

以下、補正の方法をいくつかのステップに分けて順に説明する。説明の際、表の中の数字の参照を、例えば、今月就業者で、前月非労働力であった者 23 万人のように一々行うと煩わしい。表側の各区分に 0 から 8 までの数字を、表頭の各区分に 0 から 9 までの数字を振ってある。表の中の数字の参照は、表側区分と表頭区分の番号の組み合わせで行うことにする。例えば今月末就業者で、前月末非労働力であった者 23 万人は、表側区分が 4 番、表頭区分が 6 であるから、‘46’と参照する。

なお、本補注では、計算過程の数字を整数表示しているが、これは小数点以下を四捨五入して表示したものである。計算過程（最終結果も含む）で四捨五入は行わない。

Step 1	0 公表値※1	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値※2			5352	3742	3582	161	1608			
1 総数		5383	5352	3742	3582	161	1608	2	3	138
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	138
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	103
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	99
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	4
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	35
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 1
21～61 を今月分の公表値に置き換える。
12～16 を前月分の公表値に置き換える。

加工した個所、結果を青字で表記する。

公表値の意味については本文参照。

Step 2	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5383	5352	3742	3582	161	1608	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 2
09～89 をゼロとする。
（転入をゼロとする）

Step3	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3742	3582	161	1608	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1595	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		32	32	19	16	3	13	0	0	0

Step 3
11 を 12 と 18 の合計とする。
（総数を前月 15 歳以上と 14 歳以下の合計とする）

Step 4	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5210	3643	3477	166	1566	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3632	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3453	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	180	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1577	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 4
①81=11-21(総数と今月 15 歳以上の差を転出総数とする)
②82=81(転出総数は全員、前月 15 歳以上とする)
③82 を 13 と 16 の比で按分し、改めて 83、86 とする。（転出総数を前月労働力と前月非労働力の比で按分し、改めて転出した前月労働力と前月非労働力とする。）
④84=83、85=0、87=0、88=0、89=0
（前月が失業、不詳、14 歳以下、転入区分の今月転出はゼロとする。）
⑤31=41+51　（本月）労働力＝就業者＋失業者
　13=14+15’（前月）労働力＝就業者＋失業者
⑥61=21-31’（本月）非労働力＝15 歳以上 - 労働力
　16=12-13’（前月）非労働力＝15 歳以上 - 労働力
（就業状態不詳を調整してなくす。Step5 以下は濃い網掛けをしておく。）
注意　この⑤と⑥の段階で、公表値と合わなくなることがある。上の例では、2013 年 1 月分調査結果では、就業状態不詳があるため、15 歳以上人口が労働力人口と非労働力人口の合計となっていない（1 月分調査結果　15 歳以上人口 5351 万人、労働力人口 3753 万人、非労働力人口 1595 万人）。ステップ 4 の結果、非労働力人口は 1598 となる。同様に前月の非労働力人口は 1609 万人となる。

Step 5	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3591	3439	152	41	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	52	38	14	1524	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 5
①22=21-28　～
62=61-68, 82=81-88
（今月 15 歳以上の内訳は、それぞれ、総数と前月 14 歳以下の差とする。）
②22=12-82　～
26=16-86
（今月 15 歳以上の前月の内訳は、総数と転出との差とする。22 は通常 18=28 なので①と同じ。）

Step 6	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3439	152	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	23	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	18	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	38	14	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 6
32、62、23、26、(36+63)/(33+36+63+66)
を所与として、
33、36、63、66
を求める。具体的な手順は、本補注末尾に示す。
（今月の労働力及び非労働力、先月の労働力及び非労働力、さらに、先月と今月で、労働力、非労働力の状態の変わらなかった者と、労働力から非労働力へ、非労働力から労働力に移行した者の比率を所与として、改めて、労働力、非労働力間の移動数を求める。）

Step 7	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3439	152	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3429	3419	10	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	162	20	142	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 7
63 を 64 と 65 の比で按分し、改めて 64、65 とする。
36 を 46 と 56 の比で按分し、改めて 46、56 とする。
（先月労働力から今月の非労働力に移った人数を、先月の就業からと、先月の失業からとに分ける。）
（先月非労働力から今月の労働力に移った人数を、今月の就業へと、今月の失業へとに分ける。）

Step 8	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3549	150	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3551	3419	10	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	148	20	142	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step 8

34=24-64
35=25-65
43=42-46
53=52-56

(先月就業から非労働力を引いて、就業から労働力に移った数とする。)
(先月失業から非労働力を引いて、失業から労働力に移った数とする。)
(今月就業から先月非労働力を引いて、労働力から就業に移った数とする。)
(今月失業から先月非労働力を引いて、労働力から失業に移った数とする。)

Step 9	0 公表値	1 総数	2 15 歳以上	3 労働力	4 就業	5 失業	6 非労働力	7 不詳	8 14 歳以下	9 転入
0 公表値			5352	3742	3582	161	1608			0
1 総数		5355	5352	3743	3582	161	1609	2	3	0
2 15 歳以上	5351	5351	5348	3740	3579	161	1608	2	3	0
3 労働力	3753	3753	3753	3699	3549	150	54	0	0	0
4 就業	3581	3581	3581	3551	3534	16	30	0	0	0
5 失業	172	172	172	148	15	134	24	0	0	0
6 非労働力	1595	1598	1595	41	30	11	1554	0	3	0
7 不詳		1	1	0	0	0	0	1	0	0
8 転出		4	4	3	3	0	1	0	0	0

Step9

43、53、34、35、(45+54)/(44+45+54+55)

を所与として、

44、45、54、55

を求める。具体的な手順は、本補注末尾に示す。
(今月就業で先月労働力であった者、今月失業で先月労働力であった者、今月労働力で先月就業、今月労働力で先月失業、さらに、先月と今月で就業、失業の状態の変わらなかった者と、失業から就業へ、就業から失業に移行した者の比率を所与として、改めて、就業と失業間の移行をそれぞれ求める。)

ステップ 9 の表で、太枠で囲った黄色く塗ってある 16 個の数字が、本文で①～⑯としてある数である。これから、本文にあるように、次の 3 行 3 列の行列を得る。

（前月末１週間の就業状況）

	就業者	完全失業者	非労働力及び 14 歳以下
就業者	3534	16	30
完全失業者	15	134	24
非労働力及び転出その他	33	11	1558

同様の計算を男女計、男性、女性のそれぞれ、2013 年１～12 月の各月について行い、最後に 12 か月平均をとる。四捨五入は行わない。

注　ステップ６と９の計算

x、y、z、w と A、B、C、D の関係

T=A+B=C+D	A	B
C	x	y
D	z	w

「本補注末尾で示す」とした計算は、A、B、C、D と α を所与（ただし 0＜α＜1、A＋B＝C＋D）として、次の連立方程式を満たす x、y、z、w を求める計算である。A、B、C、D は、ステップ６であれば、それぞれ‘23’、‘26’、‘32’、‘62’に相当する（□で囲った箇所)。また、ステップ９であれば、それぞれ‘34’、‘35’、‘43’、‘53’に相当する。

x+z=A
y+w=B
x+y=C
z+w=D
y+z=αT　(T=A+B=C+D)

この解は、

x=(C-B+βT)/2

y=(C-A+αT)/2

z=(A-C+αT)/2

w=(B-C+βT)/2

(β=1-α と置いた)

である。(T=A+B=C+D を利用して、ほかにも色々な表し方がある。)

y+z=αT を除く４つの式だけでは、A＋B＝C＋D という関係があるため、x、y、z、w が求められない。y+z=αT という条件を加えて、x、y、z、w を求めるわけである。

このαとして使用する値は、補正前において、就業状態が変化した者の全体に占める割合、つまり、ステップ６であれば労働力と非労働力間を移動した者の割合

(36+63)/(33+36+63+66)、

ステップ９であれば就業と失業間を移動した者の割合

(45+54)/(44+45+54+55)

とする。つまり、労働力と非労働力間を移動した者の割合、或いは、就業と失業間を移動した者の割合が補正前、補正後で変わらないように、状態間の移動量 x、y、z、w を求めるわけである。

参考　2013 年の数値

今月の状態	男女計 前月の状態 就業者	男女計 前月の状態 完全失業者	男女計 前月の状態 非労働力及び 14 歳以下	男性 前月の状態 就業者	男性 前月の状態 完全失業者	男性 前月の状態 非労働力及び 14 歳以下	女性 前月の状態 就業者	女性 前月の状態 完全失業者	女性 前月の状態 非労働力及び 14 歳以下
毎月の補正結果の平均　単位：万人									
就業者	6194	32	85	3563	17	30	2632	16	54
完全失業者	27	209	29	13	135	14	13	74	16
非労働力及び転出その他	83	27	4411	33	12	1536	50	14	2875
就業状態の変化を示す行列 A									
就業者	0.98259	0.12083	0.01878	0.98717	0.10394	0.01921	0.97654	0.15000	0.01837
完全失業者	0.00423	0.78007	0.00650	0.00363	0.82137	0.00900	0.00495	0.71285	0.00530
非労働力及び転出その他	0.01318	0.09910	0.97473	0.00920	0.07469	0.97179	0.01850	0.13715	0.97633
労働移動率行列 B　I+log(A)									
就業者	0.98201	0.13666	0.01872	0.98679	0.11448	0.01907	0.97562	0.17756	0.01832
完全失業者	0.00478	0.75082	0.00739	0.00398	0.80254	0.01003	0.00585	0.66036	0.00627
非労働力及び転出その他	0.01322	0.11251	0.97389	0.00924	0.08298	0.97090	0.01853	0.16207	0.97541
Ａ又はＢのべき乗の収束値（各列が、定常状態における就業者、失業者、その他の構成比。各列同じである。）									
就業者	0.58334	0.58334	0.58334	0.67533	0.67533	0.67533	0.49443	0.49443	0.49443
完全失業者	0.02286	0.02286	0.02286	0.02863	0.02863	0.02863	0.01753	0.01753	0.01753
非労働力及び転出その他	0.39380	0.39380	0.39380	0.29604	0.29604	0.29604	0.48804	0.48804	0.48804

注　紙面では四捨五入して表示しているが、計算途中で四捨五入はしていない。

２　就業状態の変化を示す行列Aのべき乗の収束

本文の範囲であれば 3 次の正方行列について示せば事足りるが、一般に成り立つ性質なので、n次の行列で説明する。

以下、次項以降も含め、行列$A=(a_{ij})$、$(i,j=1,\cdots,n)$を各成分が正で、各列の列和が 1 である n 次元の正方行列とする。各i,jについて、$a_{ij}>0$、$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$である。極限$\lim_{m\to\infty}A^m$の存在を示す。

(1)（正値、列和の継承性）行列 A の m 乗A^mも、各成分が正で、各列の列和が 1 である。

行列$A=(a_{ij})$の m 乗A^mを$\left(a_{ij}^{(m)}\right)$と書く。$A^{m+1}=AA^m$であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}$$

である。まず、$a_{ij}^{(m)}>0$であれば、これから$a_{ij}^{(m+1)}>0$ は明らかである。また、$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m)}=1$ であれば、

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^{(m)}=1$$

となり、$m+1$でも成立する。数学的帰納法により、すべての m について列和=1 が成り立つ。

(2)　Aの m 乗は、m を無限大にすると、一定の行列A^*に収束する。

A、B、C の 3 段階に分けて示す。

A　A^{m+1}のi行の各成分と、A^mのi行の最大値と最小値、Aの各成分の最小値との関係

行列$A=(a_{ij})$の各成分の最小値を γ とする。Aの列和が 1 であるので、

$$0<\gamma\leqq 1/n \qquad ①$$

である。

また、A^mのi行の各成分$a_{ik}^{(m)}$$(k=1,2,\cdots,n)$の最大値を$g_i^{(m)}$、最小値を$l_i^{(m)}$とし、最大値、最小値を取る列$k$の値をそれぞれ$k_g$、$k_l$とする（複数あればそのうちの 1 つ）。

$A^{m+1}=A^mA$における i 行を考える。A^mの i 行の各成分の 1 つは最小値$l_i^{(m)}$であり、その他は最大値$g_i^{(m)}$以下であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(m)}a_{kj}=l_i^{(m)}a_{k_lj}+\sum_{k\neq k_l}a_{ik}^{(m)}a_{kj}$$

$$\leqq l_i^{(m)}a_{k_lj}+\sum_{k\neq k_l}g_i^{(m)}a_{kj}=\left(l_i^{(m)}-g_i^{(m)}\right)a_{k_lj}+g_i^{(m)}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}$$

$$=g_i^{(m)}-\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right)a_{k_lj}\leqq g_i^{(m)}-\gamma\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right) \qquad ②$$

最後の等式は列和が 1 であること、γ がすべての成分の最小値であることを使った。

同様に、A^mの i 行の各成分の 1 つは最大値 $g_i^{(m)}$であり、その他は最小値 $l_i^{(m)}$以上であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(m)}a_{kj}=g_i^{(m)}a_{k_gj}+\sum_{k\neq k_g}a_{ik}^{(m)}a_{kj}$$

$$\geqq g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} l_i^{(m)} a_{kj} = \left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) a_{k_g j} + l_i^{(m)} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$$

$$= l_i^{(m)} + \left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) a_{k_g j} \geqq l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \qquad ③$$

②と③により、A^{m+1}のi行の各成分$a_{ik}^{(m+1)}$ $(k = 1,2,\cdots,n)$について次の不等式が成立する。

$$l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \leqq a_{ik}^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \qquad ④$$

A^{m+1}のi行の各成分は、A^mのi行の最大値、最小値、両者の差、さらにAの各成分の最小値で評価できることを表している。

B　各行の最大値、最小値の収束

④と、$l_i^{(m+1)}, g_i^{(m+1)}$の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \leqq l_i^{(m+1)} \leqq a_{ik}^{(m+1)}$$
$$\leqq g_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

一番左の項はさらに

$$l_i^{(m)} \leqq l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

一番右の項はさらに、

$$g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \leqq g_i^{(m)}$$

である。これから、

$$l_i^{(m)} \leqq l_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)}$$

よって、数列$l_i^{(m)}$$(m = 1,2,\cdots)$は単調増加で上に有界、数列$g_i^{(m)}$$(m = 1,2,\cdots)$は単調減少で下に有界である。それぞれ、極限が存在することがわかる。

C　行列の収束

数列$g_i^{(m)}$と$l_i^{(m)}$ $(m = 1,2,\cdots)$の極限をそれぞれg_i、l_iと置く。g_i=l_iが、以下のようにして示される。

④式により、

$$g_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$
$$-l_i^{(m+1)} \leqq -l_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

辺々を足し合わせ、

$$g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - l_i^{(m)} - 2\gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) = (1 - 2\gamma)\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

よって、

$$0 \leqq g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leqq (1 - 2\gamma)^m\left(g_i^{(1)} - l_i^{(1)}\right) \qquad ⑤$$

n が 2 以上であれば、行列の各成分の最小値は 2 分の 1 以下であるから、m→∞のとき、⑤式の右辺→0 となり、g_i=l_iがわかる。（n=1 の場合は行列 A=(1)で自明。）

この極限値を改めてα_iと書く。行列$A = (a_{ij})$の累乗A^mの第i行は、m→∞のとき、各列の成分が全てα_iに収束する。すなわち、m→∞のときのA^mの極限をA^*と書けば

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}、各\alpha_i > 0、\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_{\mathrm{i}} = 1$$

である。

３　就業状態の変化を示す行列 A に対し、状態ベクトルの列 X、AX、A^2X、…の極限の存在

就業状態の変化を示す行列A、各成分が正で和が 1 である状態ベクトルXに対し、ベクトルの列

$$X、\mathrm{A}X、A^2X、A^3X、\ldots\ldots$$

の極限が存在しA^*Xであること。ここで、$A^* = lim_{m\to\infty} A^m$。

これを X^*と置くと、X^*も状態ベクトルで、初期値 X によらず、また、A^*を乗じても、A を乗じても不変である。$A^*X^* = X^*$、$AX^* = X^*$

ベクトルA^mXは、A^mの列の線形結合（係数は Xの各成分）であるから、極限があって、A^*Xであることは明らか。

A^*は、前項２でみたとおり、i行の各列の値が等しく（２と同様、α_iと置く）、ベクトル Xは成分の合計が 1 であるから、$X^* = A^*X$の第i成分はα_iである。つまり$X^* = A^*X$は、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

にほかならない。初期値 X に関係ない状態ベクトルである。

A^*X^*の第i成分は、$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j$で、$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$であるから、これは$\alpha_i$に等しい。つまり、$A^*X^* = X^*$。

AX^*の第i成分は、$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k$であるが、$AA^m = A^{m+1}$であるから、

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)} = a_{ij}^{(m+1)}$$

で（記号は２と同じ）、mを∞にすることで、

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k = \alpha_i$$

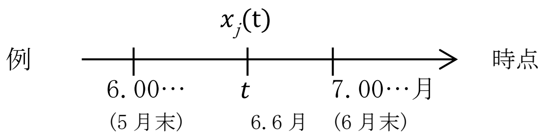
が成り立つ。つまり、$AX^* = X^*$

4　就業状態の変化を示す行列と移動率行列との関係

一定の仮定のもとでは、$B=\left(b_{ij}\right)=I+log(A)$で、移動率$b_{ij}$が得られること。この$B$に関して、$BX^{*}=X^{*}$であること

状態jから状態iに 1 か月（単位期間）当たり移動する者の割合がb_{ij}で表され、b_{ij}は時点や人数に依らない定数であるとする（$i,j=1,\cdots,n$、$i\neq j$）。

状態jの時点tにおける人数を$x_j(\mathrm{t})$と置く。時点は、月を単位とし、連続的に変化するものとする。



時点tからΔt月の間に、他の状態iから状態jに移る者の人数は、

$$\Delta\mathrm{t}\cdot b_{ji}x_i(\mathrm{t})$$

であり、状態jから他の状態iに移る者の人数は、

$$\Delta\mathrm{t}\cdot b_{ij}x_j(\mathrm{t})$$

である。ここで状態iは、状態j以外のすべての状態である。$i,j=1,\cdots,n$、$i\neq j$。

例えば、b_{ij}が 0.1 であったとする。状態jにある者は常に、1 か月あたり 0.1（1 割）の割合で状態iに移動するということである。0.01 か月の間であれば、0.01×0.1 の者が状態iに移動する。tが図の例のように 6.6 月であれば、6.6 月時点において状態jにある者（$x_j(\mathrm{t})$だけいる）は、0.01 か月後の 6.61 月までの間に、0.01×0.1×$x_j(\mathrm{t})$の者が状態iに移動する。

今、Δtが 0.01 か月というように十分短ければ、その間に、状態jに移ってきた者が別の状態にまた移ったり、或いは状態jから他の状態に移った者がまた戻ってきたりすることはないと考えられる。

すると、状態jの時点tにおける人数と時点$t+\Delta t$における人数の差$x_j(t+\Delta t)-x_j(t)$は、

$$x_j(t+\Delta t)-x_j(t)=\sum\nolimits_{i\neq j}\left(\Delta\mathrm{t}\cdot b_{ji}x_i(\mathrm{t})-\Delta\mathrm{t}\cdot b_{ij}x_j(\mathrm{t})\right)$$

$$=\Delta\mathrm{t}\sum\nolimits_{i\neq j}\left(b_{ji}x_i(\mathrm{t})-b_{ij}x_j(\mathrm{t})\right)$$

と表せる。ここで$b_{jj}=1-\sum_{i\neq j}b_{ij}$と定義すれば、

$$x_j(t+\Delta t)-x_j(t)=\Delta\mathrm{t}\left(\sum\nolimits_{i\neq j}b_{ji}x_i(\mathrm{t})+b_{jj}x_j(\mathrm{t})-x_j(\mathrm{t})\right)$$

$$=\Delta\mathrm{t}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n}b_{ji}x_i(\mathrm{t})-x_j(\mathrm{t})\right) \qquad ①$$

行列(b_{ij})を B、ベクトル$\left(x_j(\mathrm{t})\right)$を$X(t)$と置き、$I$を単位行列として、①を行列表示すると、

$$X(t+\Delta t)-X(t)=\Delta t\cdot(B-I)X(t) \qquad ②$$

となる。すなわち、

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=(B-I)X(t)$$

である。Δtは十分短く、さらに、$\Delta t \to 0$とすると、

$$\frac{dX}{dt} = (B - I)X(t) \quad ③$$

微分方程式②の基本解は、行列の指数関数

$$exp(t(B - I)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B - I)^k}{k!} t^k$$

であり、$X(0)$を初期ベクトルとすれば、

$$X(t) = \exp(\mathrm{t(B - I))X(0)} \quad ④$$

が初期条件を満たす②の解である。

④から、$X(T)$と１か月経過後の$X(T+1)$の間には、

$$X(T+1) = exp(B - I)X(T) \quad ⑤$$

という関係があることになる。

一方、$X(T)$から１か月経過後の$X(T+1)$は、就業状態の変化を示す行列 A によって、

$$X(T+1) = AX(T) \quad ⑥$$

という関係にある。したがって、

$$A = exp(B - I) \quad ⑦$$

これから、

$$B = I + log(A) \quad ⑧$$

となる。

ただし、$log(A)$が求まるためには、行列$A - I$のノルムが１未満でなくてはならない。就業状態の変化を示す行列 A の場合、j =$1,2,\cdots,n$として、

$$|a_{jj} - 1| + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| = 2(1 - a_{jj})$$

であって、Aの対角成分（同じ状態が継続する割合）がすべて 0.5 より大きいときは、この最大値が１未満となる。

次に、就業状態の変化を示す行列 A（各i,jについて、$a_{ij} > 0$、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$である行列）の定常ベクトル$X^*$は、$B = I + log(A)$の定常ベクトルでもある、すなわち$BX^* = X^*$となることを示す。

$$B = I + log(A) = I + log(I + (A - I)) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (A - I)^k$$

であって、$AX^* = X^*$、すなわち$(A - I)X^* = 0$であるから、

$$BX^* = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (A - I)^k \right) X^* = X^*$$

５　移動率が定常状態にあっては１か月間に移った総数の割合に相当すること

移動率b_{ij}は、定常状態にあっては、前月末の状態 j から１か月の間に状態 i に移った総数*の前月末の状態 j の人数に対する割合に相当すること（＊総数とは１か月の間に再度別の状態に移った者も含めた数のこと）

時点tからΔt月の間に、状態jから状態iに移る者の人数は、

$$\Delta t \cdot b_{ij} x_j(t)$$

である。前月末 T から今月末 T+1 まで間に、状態jからiに移った者の総数は、一般に、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt$$

となる。b_{ij}が時間によらない定数であるから、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt = b_{ij} \int_{t=T}^{T+1} x_j(t) dt$$

であり、さらに、今、定常状態で、状態jにある者の数$x_j(t)$は常に一定（X_jと置く）であるから、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt = b_{ij} \int_{t=T}^{T+1} x_j(t) dt = b_{ij} X_j$$

したがって、前月末 T から今月末 T+1 まで間に、状態jから状態iに移った者の総数の状態jの前月末における人数$x_j(T) = X_j$に対する割合は、$b_{ij} X_j / X_j = b_{ij}$となる。

６　失業頻度について

定常状態の状態ベクトルを$X^* = (l, u, n)$として、

$$(b_{21} l + b_{23} n) ／ (l + u)$$

が、定常状態にあっては、1 か月間に発生する失業の総数の前月末の労働力人口に対する割合（すなわち失業頻度）に相当すること。

$(b_{21} l + b_{23} n) ／ (l + u)$の分母、分子に 15 歳以上人口を乗じて考えるとわかりやすい。15 歳以上人口×l、15 歳以上人口×u、15 歳以上人口×nは、それぞれ就業者数、失業者数、その他の人数である。定常状態にあっては、それぞれ一定である。分子の 15 歳以上人口×$b_{21} l = 15$ 歳状人口 $\times l \times b_{21} =$ 就業者数 $\times b_{21}$は５で述べたように、1 か月間に就業状態から失業状態に移る者の総数、15 歳以上人口×$b_{23} n =$ 15 歳以上人口 $\times n \times b_{23}$は同様に 1 か月間にその他の状態から失業状態に移る者の総数となる。この合計は、1 か月間に就業及びその他の状態から失業状態となった総数、つまり、発生した失業総数となる。分母の 15 歳以上人口×$(l + u)$は、労働力人口にほかならない。$(b_{21} l + b_{23} n) ／ (l + u)$が、1 か月間に発生する失業総数の労働力人口に対する割合であることがわかる。

7　定常状態における失業率＝失業頻度×失業継続期間の成立

定常状態にあっては、

$$\frac{(b_{21}l+b_{23}n)}{(l+u)}\times\frac{1}{(b_{12}+b_{32})}=\frac{u}{(l+u)}$$

が成り立つこと。

今、$1/(b_{12}+b_{32})$を失業継続期間、$u／(l+u)$を定常状態の失業率と呼ぶことにすると、

失業頻度×失業継続期間＝定常状態の失業率

となる。

定常状態にあっては、$BX^*=X^*$である。この等式の第２行は、

$$b_{21}l+b_{22}u+b_{23}n=u$$

したがって、

$$b_{21}l+b_{23}n=u(1-b_{22})=u(b_{12}+b_{32})$$

左辺は 1 か月当たり就業状態とその他状態から失業状態に移る割合（新たに発生する失業の割合）、右辺が 1 か月当たり失業状態から就業状態とその他状態に移る割合（消滅する失業の割合）を表す。割合とは、15 歳以上人口を 1 とした割合のことである。この等式は、定常状態では両者が等しいことを示す（定常状態であるから当然と言える。）。

この等式から、

$$\frac{(b_{21}l+b_{23}n)}{(l+u)}\times\frac{1}{(b_{12}+b_{32})}=\frac{u(b_{12}+b_{32})}{(l+u)}\times\frac{1}{(b_{12}+b_{32})}=\frac{u}{(l+u)}$$

８　失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和の逆数の意味について

失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和$b_{12}+b_{32}$の逆数$1/(b_{12}+b_{32})$には、二つの意味がある。

失業状態から就業状態への移動率とその他の状態への移動率の和$b_{12}+b_{32}$は、1 か月当たり、失業から他の状態に移る割合（消滅する失業の割合）である。

一つは、定常状態にあっては、失業の発生から消滅までの期間の平均に相当すること。

定常状態にあっては、７でみたとおり、次が成立する。

$$\frac{(b_{21}l+b_{23}n)}{(l+u)}\times\frac{1}{(b_{12}+b_{32})}=\frac{u}{(l+u)}$$

両辺に$l+u$を乗じ、さらに、15 歳以上人口を乗じると、これは、

毎月、発生する失業者数×$1/(b_{12}+b_{32})$＝ストックとしての失業者数

であることを示す。

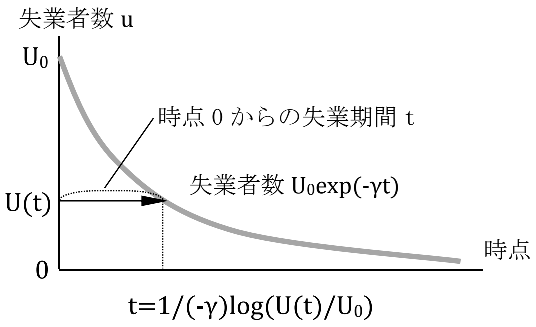
したがって、$1/(b_{12}+b_{32})$は、定常状態で一定となっているストックとしての失業者数と、毎月発生する失業者数の比率ということになる。定常状態では、毎月発生する失業数と毎月消滅する失業数が等しく、ストックとしての失業者数（15 歳以上人口×u）が一定の状態である。発生した失業者は、この比率の期間だけ失業状態にとどまり、他の状態に移行する、つまり、この比率が、失業状態にとどまる期間の長さ(月数)に相当することになる。

もう一つは、ある時点の失業者たちが今後継続して失業状態にある期間の平均に相当すること。人数に依らず、１か月当たり、失業から他の状態に移る割合が$b_{12}+b_{32}$であることが前提である。

時点 0 における失業者数を考える。U_0と置く。また、以下、$\gamma = b_{12}+b_{32}$と置く。継続して失業している者は、1 か月当たりγの割合で減じていく前提であるから、時点tにおいて時点 0 から継続して失業している数は、

$$U(t) = U_0 exp(-\gamma t)$$

で表される（減少率は、$(dU/dt)/U = -\gamma$となる。)。



時点tと$t+\Delta t$の間に、失業者数は$U(t)$から$U(t+\Delta t)$に減る。この間に失業状態から外れた者の時点 0 以降の失業期間はtと置ける。

時点 0 においてU_0だけいる失業者の失業期間の平均は、

$$\frac{1}{U_0}\int_0^{U_0} t\,du$$

である（上図)。tは、$U(t)$を使って、

$$t = \frac{1}{-\gamma} log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$$

と表されるから、これは、

$$\frac{1}{U_0}\int_0^{U_0} t\,du = \frac{1}{U_0}\int_0^{U_0} \frac{1}{(-\gamma)} log\left(\frac{U(t)}{U_0}\right) du = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{b_{12}+b_{32}}$$

となる。

補注３　UV 曲線の係数を求める計算について（本文 8.1）

欠員率 v の対数、雇用失業率 u の対数の間に想定する UV 曲線$log(u) = \alpha + \beta log(v)$の係数$\alpha$、$\beta$は、通常の最小二乗法で求めていない。ダービン・ワトソン比が 1 を大きく下回り、残差に自己相関があるので、より的確な係数を求めるため、誤差項に 1 階の自己相関があるとした

$$log(u_t) = \alpha + \beta log(v_t) + \rho e_{t-1} + \varepsilon \qquad (*)$$

というモデル式を設定し、α、βを求めている。

このモデル式では、通常の最小二乗法によるα、βの推計はできず、次のようにして行っている（縄田和満著「EViews による計量経済分析入門」、朝倉書店、2009 年、89 頁参照)。

二つの時系列X_t、Y_tの実績が与えられたとする。添え字は時点を表し、$1, \cdots, n$とする。今の場合、2001 年第 1 四半期から 2006 年第 4 四半期など、関数を推定する期間における各四半期の欠員率の対数値、雇用失業率の対数値である。

１　実績X_t, Y_t $(t = 1, \cdots, n)$を使って、通常の最小二乗法（定数項あり）で、

$$Y_t = \text{定数項} + aX_t + \varepsilon$$

の定数項とaを求める。得られた定数項とaを使って、各時点$t = 1, \cdots, n$における残差

$$e_t = Y_t - \left(\text{定数項} + aX_t\right)$$

を計算する。

２　計算した各時点$t = 1, \cdots, n$における残差e_tを使って、通常の最小二乗法（定数項なし）で、

$$\text{残差}e_t = \rho \times 1\text{期前の残差}e_{t-1} + \varepsilon$$

のρを求める。つまり、$e_1, \cdots e_n$から、

$$\frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}$$

を計算し、これをρと置く（定数項なしの最小二乗法でρを求める式)。

３　実績X_t, Y_t $(t = 1, \cdots, n)$と 2 で得られたρを使って、次の 3 本の時系列を計算する。

時点	R^*	X^*	Y^*
第 1 時点	$\sqrt{1-\rho^2}$	$\sqrt{1-\rho^2}\,X_1$	$\sqrt{1-\rho^2}\,Y_1$
第 2 時点	$1-\rho$	$X_2 - \rho X_1$	$Y_2 - \rho Y_1$
…	…	…	…
第 n 時点	$1-\rho$	$X_n - \rho X_{n-1}$	$Y_n - \rho Y_{n-1}$

４　R_t^*, X_t^*, Y_t^*　$(t = 1, \cdots, n)$　を使って、通常の最小二乗法（定数項なし）で、

$$Y_t^* = \alpha R_t^* + \beta X_t^* + \varepsilon$$

の α と β を求める。これらを求める α と β とする。

補足

モデル式(＊)のαとβを求める方法は、コクラン・オーカット法など、他にもいくつかある。上で述べた方法の拡張として、得られたαとβをそれぞれ１の定数項とaとして、１から再度、２、３、４を行うと、また新たなα、βが得られるが、この過程を、得られるα、βが一つ前の段階のαとβと変わらなくなる（或いは２のρが変わらなくなる）まで繰り返すという方法もある。また、最尤法の考え方で、計算機で数値的にα、βを求める方法もある。得られる結果は、方法に依って若干異なる。