# 補　注

## 補注１　3.2　労働投入のディビジア指数

本文 3.2 は、労働の質を考慮した就業者数の推移を表す指数として、賃金を使った就業者数のディビジア指数を取り上げている。この補注では、ディビジア指数の考え方をより詳しく述べる。

今、生産に投入される労働の種類が n 種類あるとする。本文は、一般労働者について性 2 区分、学歴 4 区分、年齢階級 12 区分、勤続年数階級 9 区分、計 864（2×4×12×9）種類、短時間労働者について性 2 区分、年齢階級 12 区分、勤続年数階級 7 区分（2011 年の場合）、計 168（2×12×7）種類、合せて 1032 種類である。

この n 種類の労働が一定の間に投入される労働投入量をそれぞれ $L_1$、…$L_n$ と置く。また、それぞれの賃金率を $w_1$、…$w_n$ と置く。それぞれ延べ労働時間数（単位は人・時間）と 1 人 1 時間当たりの賃金である。ただし本文では、使用する賃金構造基本統計調査の表章に沿って、労働者数（単位は人）と 1 人当たり月間所定内給与額としている。

賃金を使った労働投入のディビジア指数 L とは、次の前提 A と前提 B から導かれる式⑤（又は⑥）を使って算出するものである。L は、$L_1$、…$L_n$、$w_1$、…$w_n$ の値に応じて値を変える関数であるが、以下では $w_1$、…$w_n$ を略して L($L_1$、…$L_n$)、または単に L と表す。

A　労働の種類のすべての組み合わせ i と j に関し、L の $L_i$ に関する偏微分係数 $\partial L/\partial L_i$ と、$L_j$ に関する偏微分係数 $\partial L/\partial L_j$ の比は、それらの賃金率の比 $w_i/w_j$ に等しい。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{w_i}{w_j} \quad \cdots\cdots ①$$

これは、労働投入が 1 単位だけ増えたときのディビジア指数の増分が、労働の種類によって賃金率の比だけ異なるということである。労働の種類がイとロの 2 種類の場合を例にとると、種類ロの賃金率が種類イの 2 倍であれば、ロの労働投入が 1 単位増えたときのディビジア指数の増分は、イの労働投入が 1 単位増えたときのそれに比べて 2

倍になるということである。

①から、L の $L_k$ に関する偏微分係数∂L/∂$L_k$ と賃金率 $w_k$ の比は、労働の種類 k によらず一定である。これを 1／ω と置く。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial L_k}}{w_k}=\frac{1}{\omega}\qquad \cdots\cdots ①'$$

B　L は $L_1$、…$L_n$ に関し一次同次である。すなわち a＞0 を任意の正の実数として、$L_1$、…$L_n$ を一斉に a 倍にすると、L も a 倍となる。

$$L(aL_1、\cdots aL_n)=aL(L_1、\cdots L_n)\qquad \cdots\cdots ②$$

これは、すべての生産要素が一斉に a 倍になれば生産量も a 倍になるという生産関数についてしばしば想定される仮定を、$L_1$、…$L_n$ の関数 L に当てはめたものである。一次同次の関数については、a を任意の正の実数として aL($L_1$、…$L_n$)＝L($aL_1$、…$aL_n$) であるから、両辺を a で微分し、a を 1 と置くことで、

$$L(L_1,\cdots L_n)=\frac{\partial L}{\partial L_1}L_1+\cdots+\frac{\partial L}{\partial L_n}L_n\qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ（一次同次式に関するオイラーの定理）。

注　前提 A は、n 種類の労働それぞれに関して、いわゆる限界生産力命題等の成立を想定すれば成り立つ。今、労働以外の生産要素の投入量は一定とし、生産量 Y は $L_1$、…$L_n$ のみの微分可能な関数 F で表されるとする。Y＝F($L_1$、…$L_n$) である。生産物の価格 p、各労働の種類の賃金率 $w_1$、…$w_n$ は所与（定数）とする。労働の総賃金コスト C は、C＝$w_1L_1$＋…＋$w_nL_n$ となる。利益は、労働以外の要素の投入に係る費用を D と置くと、pY－（C＋D）となる。D は、労働以外の生産要素の投入量は一定としているので一定とする。C は労働投入量 $L_1$、…$L_n$ に応じて変わる。今、総賃金コスト C が変わらないという条件の下で、利益
pY－（C＋D）が最大となるように、各労働の種類の労働投入量が決まるとする。そうなる必要条件は、各労働の種類の当該労働投入量における限界生産力∂F/∂$L_i$（i＝1, …n）が、当該労働の種類の実質賃金率 $w_i/p$ に等しいことである。これが限界生産力命題である。さらに、生産量 Y の関数 F は、別の 1 変数の関数 G と L の合成関数になるとする。すなわち、ある 1 変数の関数 G があって、生産量 Y＝F($L_1$、…$L_n$)＝G(L($L_1$、…$L_n$)) が成り立つものとする。G は L の微分可能な関数でもあるとする。各労働の種類の限界生産力∂F/∂$L_i$は、F が G と L の合成関数となることから、∂G/∂L×∂L/∂$L_i$ となる（i＝1, …n）。以上から、次のとおり、①が導かれる。2 番目の等式が F は G と L の合成関数であることから、3 番目の等式が限界生産力命題から、それぞれ成立する。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{\frac{\partial G}{\partial L}}{\frac{\partial G}{\partial L}} \cdot \frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L_i}}{\frac{\partial F}{\partial Lj}} = \frac{\frac{w_i}{p}}{\frac{w_j}{p}} = \frac{w_i}{w_j}$$

なお、①自体は、限界生産力命題の成立を必ずしも必要としない。

等式③の右辺の各$\partial L/\partial L_k$に①´の関係を使うと、

$$L(L_1,\cdots L_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{\omega} L_k = \frac{C}{\omega} \qquad \cdots\cdots ④$$

C は、$C = w_1L_1 + \cdots + w_nL_n$ で、労働の総賃金コストである。

ここで、各労働の種類の労働投入量 $L_i$ が時間の経過とともに変化した場合に、ディビジア指数 L がどのように変化するのかみる。$L(L_1$、$\cdots L_n)$の各変数 $L_1$、$\cdots L_n$ は、時間の経過と共に変化する時刻 t の微分可能な関数と考える。$L(L_1$、$\cdots L_n)$は t の関数となる。t で微分すると、一般に、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial L_k} \cdot \frac{dL_k}{dt}$$

が成立する（$w_1$、…、$w_n$ は時刻 t の関数とは考えない)。①´から

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial L_k} \cdot \frac{dL_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_k}{\omega} \cdot \frac{dL_k}{dt} = L \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{dL_k}{dt} / L_k$$

すなわち

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる。⑤式は、ディビジア指数 L の満たすべき時刻 t に関する微分方程式である。左辺はディビジア指数 L の増減率に相当する。ディビジア指数とは、各労働の種類の労働投入量 $L_k$（$k = 1, \cdots n$）の増減率$(dL_k/dt)/L_k$を、当該労働の種類 k の賃金コスト $w_kL_k$ が総賃金コスト $C = w_1L_1 + \cdots + w_nL_n$ に占める割合で加重平均したもので増減するものである。

そこで、

・まず、各労働の種類の労働投入量の増減率を、当該労働の種類の賃金コストが総賃金コストに占める割合で加重平均する。

・次に、その加重平均して得た率を累積し、ある特定時点を 100 とする各時点の値を得る。

こうして得た値をディビジア指数とする。

次に、ディビジア指数の増減率と、各労働の種類の労働投入量の単純な合計の増減率との関係をみる。そのため、各労働の種類の構成比を使った形に⑤を書き直す。労働投入量の単純な合計を B、各労働の種類の労働投入量の構成比を $b_k$ と置く。

$$B = L_1 + \cdots + L_n \qquad L_k = Bb_k$$

である。$L_k$、B、$b_k$ はいずれも時刻 t の関数である。$L_k = Bb_k$ の両辺を t で微分すると、

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{dB}{dt}b_k + B\frac{db_k}{dt}$$

これを⑤の右辺に代入する。$L_k = Bb_k$ であること、$C = w_1L_1 + \cdots + w_nL_n$ で、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C} = 1$$

であることに注意して整理すると、⑤は次のとおりとなる。

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{L} = \sum_{k=1}^{n}\frac{w_kL_k}{C}\cdot\frac{\frac{db_k}{dt}}{b_k} + \frac{\frac{dB}{dt}}{B} \qquad \cdots\cdots⑥$$

この⑥が、ディビジア指数の増減率（左辺）と各労働の種類の労働投入量の単純な合計 B の増減率との関係がわかるように、⑤を変形した式である。ディビジア指数の増減率は、次の二つの合計であることがわかる。

ⅰ　⑥右辺第 1 項　各労働の種類の構成比の増減率 $db_k$／$dt$／$b_k$ を、当該労働の種類の賃金コストの総賃金コストに占める割合$w_kL_k$／C で加重平均したもの

ⅱ　⑥右辺第 2 項　労働投入量全体 B の増減率

ｉが、ディビジア指数の増減率と労働投入全体 B の増減率との差で、本文で「労働の質の変化率」と呼ぶ部分である。

この⑥式は、各労働の種類の賃金率 $w_1$、…$w_n$ の加重平均を w（全労働者の平均賃金率）

$$w=(w_1L_1+\cdots+w_nL_n)/(L_1+\cdots+L_n)=C/B$$

と置くと、さらに次の⑦に変形される。ここで w＝C／B、$L_k$＝$Bb_k$ である。また、構成比 $b_1$、…$b_n$ の合計は 1 であるから、各構成比の時刻 t で微分した微分係数の合計は 0 であること、すなわち、

$$\frac{db_1}{dt}+\cdots\cdots+\frac{db_n}{dt}=0$$

を使う。

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{L}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(w_k-w)L_k}{C}\cdot\frac{\frac{db_k}{dt}}{b_k}+\frac{\frac{dB}{dt}}{B}\qquad\cdots\cdots⑦$$

これから、右辺第 1 項の正負、つまり労働の質の変化率と呼ぶものの正負は、各労働の種類の賃金率 $w_k$ と全体の平均 w の差と、労働の投入量の構成比の増減率($db_k/dt$)／$b_k$ の大きさなどによって決まることがわかる。

注　w は、w1、…、$w_n$ の加重平均であるから、w と $w_k$ との大小関係は労働の種類 k によって様々である。また、$db_1/dt$＋…＋$db_n/dt$＝0 であるから、$db_k/d_t$ の正負は労働の種類 k によって様々である。

特に、

・賃金率が全体の平均より高い（$w_k$＞w）労働の投入量の構成比が上昇

（$db_k/dt$＞0）し、

・賃金率が全体の平均より低い（$w_k$＜w）労働の投入量の構成比が

低下

（$db_k/dt<0$）するとき、

右辺の第1項が正となり、ディビジア指数の増減率が労働投入量全体の増減率（右辺の第2項）を上回る、つまり、労働の質の変化率と呼ぶ値が正で、労働の質が上昇することがわかる。賃金率が限界生産力に等しいとすれば、右辺の第1項はまさに「労働の質の変化分」と呼ぶのに相応しいことがわかる。

注　賃金率が限界生産力に等しいことに加え、限界生産力の高い労働が、質の高い労働であることも暗に前提としている。ディビジア指数そのものは、賃金の高い労働者層が相対的に増えれば、労働者数の増加率よりも高い増加率となるように計算したものでしかない。

また、賃金率が労働の種類に依らない、つまり各kで$w_k=w$のときは、右辺第1項は0で、ディビジア指数の増減率は労働投入量全体の増減率と同じであることなどもわかる。

（実際の計算）

実際の計算に用いる資料は、賃金構造基本統計調査による常用労働者（一般労働者と短時間労働者）の統計で、労働投入量は6月末時点の労働者数、賃金率は6月分の所定内給与額である。

⑤（又は⑥）は時刻tの微分可能な関数の微分方程式で、これを賃金構造基本統計調査のような1年に1回、特定月の統計に当てはめなくてはならない。

そのため、tを年単位の連続変数と考え、⑤を時刻t年からt+1年まで積分する。

$$\int_t^{t+1} \frac{\frac{dL}{dt}}{L} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k} dt$$

すなわち、

$$\ln\bigl(L(t+1)\bigr) - \ln\bigl(L(t)\bigr) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k} dt \quad \cdots\cdots ⑧$$

ここで ln は自然対数関数である。

注　一般に t の関数 f(t)（＞0）の微分 df/dt を f で割った（df/dt）／f の積分は ln(f) である。

$$\int_a^b \frac{\frac{df}{dt}}{f(t)} dt = \ln(f(b)) - \ln(f(a))$$

また、

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) \cong \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$$

であるから、ln（f(b)）－ln（f(a)）は、f(b) の f(a) に対する増減率に相当する。

右辺の Σ の中の各項は、積分形の平均値の定理から、0 以上 1 以下のある $\theta_k$ があって、t＋ $\theta_k$ における

$$\frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k}$$

の値に等しいが、これを、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_k L_k}{C}(t+1) + \frac{w_k L_k}{C}(t)\right) \times \left(\ln(L_k(t+1)) - \ln(L_k(t))\right)$$

で近似する。

実際の計算は、2011 年のディビジア指数であれば、まず一般労働者の性、学歴、年齢階級、勤続年数の別に、また、短時間労働者の性、年齢階級、勤続年数の別に、次の率を計算し合計する。これが⑧の右辺に相当し、⑧の左辺 ln（L（2011 年））－ln（L（2010 年））の値である。

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\text{当該労働者種類の 2011 年所定内給与額×労働者数}}{\text{n 種類ある各労働者種類の 2011 年所定内給与額×労働者数の合計}} + \frac{\text{当該労働者種類の 2010 年所定内給与額×労働者数}}{\text{n 種類ある各労働者種類の 2010 年所定内給与額×労働者数の合計}}\right\}$$

×当該労働者種類の 2011 年と 2010 年の労働者数の対数値の差

一方、⑥を時刻 t から t＋1 まで積分すると、

$$\int_{t}^{t+1} \frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t}^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k} dt + \int_{t}^{t+1} \frac{\frac{\partial B}{\partial t}}{B} dt$$

すなわち、

$$\ln\bigl(L(t+1)\bigr) - \ln\bigl(L(t)\bigr) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t}^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k} dt$$
$$+ \ln\bigl(B(t+1)\bigr) - \ln\bigl(B(t)\bigr) \cdots\cdots ⑨$$

右辺の ln(B(t＋1))－ln(B(t))は、2011 年のディビジア指数でいえば、賃金構造基本統計調査による 2011 年と 2010 年の常用労働者数の対数値の差（常用労働者数の増減率）である。先に求めた

ln(L(2011 年))－ln(L(2010 年))

からこの ln(B(2011 年))－ln(B(2010 年))を差し引いて得た値、

$$\left\{\ln\left(L(2011\text{年})\right) - \ln\left(L(2010\text{年})\right)\right\}$$
$$- \left\{\ln\left(B(2011\text{年})\right) - \ln\left(B(2010\text{年})\right)\right\}$$

が、⑨式によれば、

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{2010}^{2011} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{db_k}{dt}}{b_k} dt$$

であり、2010 年から 2011 年にかけた労働の質の変化率に相当する。

## 補注２　7.6　行列の収束

本文の範囲であれば3次の正方行列について示せば事足りるが、一般に成り立つ性質なので、一般の行列で説明する。以下、各成分が正で、各列とも列和が 1 である n 次元の正方行列 $A=(a_{ij})$、$a_{ij}>0$、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$について

1)　A の m 乗$A^m$も各成分が正で、各列の列和が 1 であること、

2)3)4)　A の m 乗は、m を無限大にすると、一定の行列 $A^*$に収束すること、

5)6)　各成分が正で和が 1 である状態ベクトル X に、A の m 乗を乗じて得るベクトル $A^mX$ が、m を無限大にするときに収束するベクトル $X^*=A^*X$ も状態ベクトルであって、しかも、初期値 X によらず、また、A を乗じても、$A^*$を乗じても不変であること（定常状態）、$AX^*=X^*$、$A^*X^*=X^*$

を示す。

1)　正値、列和の継承性

行列 $A=(a_{ij})$の m 乗 $A^m$ を$\left(a_{ij}^{(m)}\right)$と書く。$A^{m+1}=AA^m=A^mA$ であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)}a_{kj}$$

である。$a_{ij}^{(m)} > 0$、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m)} = 1$ が成立すれば、この式から、$a_{ij}^{(m+1)} > 0$ は明らかであり、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^{(m)} = 1$$

となり、m+1 でも成立するので、数学的帰納法によりすべての m について列和＝1 が成り立つ。

2)　各行の最大値、最小値の評価

行列 $A=(a_{ij})$の成分の最小値を γ とする。A の列和が 1 であるの

で、

$$0<\gamma\leqq 1/n \qquad \cdots①$$

が成立する。また、$A^m$ の i 行の各成分$a_{ik}^{(m)}$（k=1,2,…,n）の最大値を$g_i^{(m)}$、最小値を$l_i^{(m)}$とし、最大値、最小値を取る列 k の値をそれぞれ$k_g$、$k_l$とする（複数あればそのうちの 1 つ）。$A^{m+1}=A^mA$ における i 行を考えてみる。$A^m$ の i 行の各成分の 1 つは最小値 $l_i^{(m)}$であり、その他は最大値 $g_i^{(m)}$以下であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(m)}a_{kj}=l_i^{(m)}a_{k_lj}+\sum_{k\neq k_l}a_{ik}^{(m)}a_{kj}\leqq$$

$$l_i^{(m)}a_{k_lj}+\sum_{k\neq k_l}g_i^{(m)}a_{kj}=\left(l_i^{(m)}-g_i^{(m)}\right)a_{k_lj}+g_i^{(m)}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}=$$

$$g_i^{(m)}-\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right)a_{k_lj}\leqq g_i^{(m)}-\gamma\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right) \qquad \cdots②$$

最後の等式は列和が 1 であること、$\gamma$ がすべての成分の最小値であることを使った。

同様に、$A^m$ の i 行の各成分の 1 つは最大値$g_i^{(m)}$であり、その他は最小値 $l_i^{(m)}$以上であるから、

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(m)}a_{kj}=g_i^{(m)}a_{k_gj}+\sum_{k\neq k_g}a_{ik}^{(m)}a_{kj}\geqq$$

$$g_i^{(m)}a_{k_gj}+\sum_{k\neq k_g}l_i^{(m)}a_{kj}=\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right)a_{k_gj}+l_i^{(m)}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}=$$

$$l_i^{(m)}+\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right)a_{k_gj}\geqq l_i^{(m)}+\gamma\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right) \qquad \cdots③$$

②と③により、$A^{m+1}$ の i 行の各成分$a_{ik}^{(m)}$（k=1,2,…,n）について次の不等式が成立する。

$$l_i^{(m)}+\gamma\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right)\leqq a_{ik}^{(m+1)}\leqq g_i^{(m)}-\gamma\left(g_i^{(m)}-l_i^{(m)}\right) \qquad \cdots④$$

$A^{m+1}$ の i 行の各成分は、$A^m$ の i 行の最大値、最小値、両者の差、さらに A の各成分の最小値で評価できることを表している。

3)　各行の最大値、最小値の収束

④と、最大値、最小値の定義から、以下の不等式が成り立つ。

$$l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \leqq l_i^{(m+1)} \leqq a_{ik}^{(m+1)}$$
$$\leqq g_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \quad \cdots ④$$

④式の一番左の項はさらに

$$l_i^{(m)} \leqq l_i^{(m)} + \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

一番右の項はさらに、

$$g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right) \leqq g_i^{(m)}$$

である。これから、数列 $l_i^{(m)}$(m=1,2,..)は単調増加で上に有界、数列$g_i^{(m)}$(m=1, 2, . . )は単調減少で下に有界となり、それぞれ、極限が存在することがわかる。

4)　行列の収束

数列$g_i^{(m)}$と$l_i^{(m)}$$(m = 1,2,..)$の極限をそれぞれ$g_i$、$l_i$と置く。$g_i$=$l_i$が、以下のようにして示される。④式により、

$$g_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$
$$-l_i^{(m+1)} \leqq -l_i^{(m)} - \gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

辺々を足し合わせ、

$$g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leqq g_i^{(m)} - l_i^{(m)} - 2\gamma\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$
$$= (1 - 2\gamma)\left(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}\right)$$

よって、

$$0 \leqq g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \leqq (1 - 2\gamma)^m\left(g_i^{(1)} - l_i^{(1)}\right) \quad \cdots ⑤$$

n が 2 以上であれば、行列の各成分の最小値は 2 分の 1 以下であるから、m→∞のとき、⑤式の右辺→0 となり、$g_i$=$l_i$がわかる。（n=1 の場合は行列 A=(1)で自明。）

この極限値を改めて $\alpha_i$ と書く。行列 A=($a_{ij}$)の累乗 $A^m$ の第 i 行は、m→∞のとき、各列の成分が全て $\alpha_i$ に収束する。m→∞のときの $A^m$ の極限を $A^*$と書けば

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$、各$\alpha_i > 0$、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

である。さらに、$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{(m)}$の極限を考えると、

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k \qquad \cdots ⑥$$

が成り立つ。

5） 状態ベクトルの極限

各成分が正で合計が1であるベクトルX(状態ベクトル)に対し、ベクトルの列

$$X、AX、A^2X、A^3X、\ldots\ldots$$

の極限$A^*X$は、i 行の各列の値が等しく $\alpha_i$ で、ベクトル X は成分の合計が 1 であるから、$A^*X$の第 j 成分は $\alpha_j$ である。つまり、初期値 X に関係なく一定の値である。極限を $X^*$と書く。

$$X^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lim_{m \to \infty} A^m X$$

6） 定常状態

$A^*X^*$の第 i 成分、$AX^*$の第 i 成分をみると、前者は$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j = \alpha_i$に等しく、後者$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k$は、⑥式により、やはり $\alpha_i$ に等しい。すなわち、

$$A^*X^*=X^*、AX^*=X^*$$

であり、$X^*$は $A^*$と A の両方について、定常状態となっている。

## 補注３　7.6　移動率行列

状態 j から状態 i に単位時間の間に移動する総件数は、状態 j の人数に比例するとする。比例定数を $b_{ij}$（時間によらない定数）と置き、移動率と呼ぶ（本文参照）。また、行列$(b_{ij})$を移動率行列と呼ぶ。

○この前提を置けば、単位時間経過前と後の各状態相互の関係（本文にいう‘就業状態の変化を示す行列 A’）がわかっているとき、移動率 $b_{ij}$が求まることを以下に示す。

状態 j の時刻 t における人数を $x_j(t)$と置く。状態 j の時刻 t における人数と時刻 $t+\Delta t$ における人数の差は、その間、状態 j に他の状態から流入した総件数と、状態 j から他の状態に流出した総件数の差である。Δt 時間に、他の状態 i から状態 j に流入した総件数は

$$\Delta t\cdot b_{ji}x_i(t)、$$

であり、状態 j から状態 i に流出した総件数は

$$\Delta t\cdot b_{ij}x_j(t)$$

である。ここで状態 i は、状態 j 以外のすべての状態である（i＝1, 2, …n、≠j)。したがって、時刻 t における人数と時刻 t＋Δt における人数の差 $x_j(t+\Delta t)-x_j(t)$は、

$$x_j(t+\Delta t)-x_j(t)=\Delta t\cdot\Sigma_{i\neq j}\{b_{ji}x_i(t)-b_{ij}x_j(t)\}$$

と表される。ここで $b_{jj}=1-\Sigma_{i\neq j}b_{ij}$と定義すれば、

$$x_j(t+\Delta t)-x_j(t)=\Delta t\cdot\{\Sigma_{i\neq j}b_{ji}x_i(t)+(b_{jj}-1)x_j(t)\}\ \text{---}\ ①$$

今、$B=(b_{ij})$（移動率行列）、$X(t)=(x_j(t))$（状態ベクトル）と置き、I を単位行列として、①式を行列表示すると、

$$X(t+\Delta t)-X(t)=\Delta t\cdot(B-I)X(t)$$

となる。

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=(B-I)X(t)$$

であり、$\Delta t\to 0$ とすると

$$\frac{dX}{dt}=(B-I)X(t) \text{---} \quad ②$$

微分方程式②の基本解は、行列の指数関数

$$\exp(t(B-I)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B-I)^k}{k!} t^k$$

であり、X(0)を初期ベクトルとすれば、

$$X(t) = \exp(t(B-I))X(0) \quad \text{————} \quad ③$$

が初期条件を満たす②の解である。

③から、X(T)と X(T＋1)の間には、

$$X(T+1) = \exp(B-I)X(T)$$

という関係があることになる。

一方、X(T)から 1 期後経過後の X(T+1)は、就業状態の変化を示す行列 A によって、X(T＋1)=AX(T)という関係にある。したがって、

$$A = \exp(B-I) \quad \text{————} \quad ④$$

対数関数 $\log(1+x)$ のマクローリン展開$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ ($|x|<1$)に、ノルムが 1 未満の行列 F を代入した行列は $\log(I+F)$と書かれ、$\exp(\log(I+F)) = I+F$ を満たす。F のノルムは、各行の成分の合計の最大値 $\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |F_{ij}|$（$F_{ij}$は $F$の成分）で評価される。

この記号を使えば、行列 A－I のノルムが 1 未満であれば、log(A)=log(I＋(A-I))が求まり、④から行列 B は I＋log(A)ということになる。

$$B=I+\log(A)$$

行列 A－I のノルムは、i＝1, 2, …, n, ≠j として、

$$|a_{ii}-1| + \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| = 2(1-a_{ii})$$

の最大値である。A の対角成分（同じ状態が継続する割合）がすべて 0. 5 より大きいときは、この最大値が 1 未満となり、log(A)が求まる。

○次に、定常状態にあっては、時刻 T から時刻 T+1 までの間における状態 j から i への総移動件数の $x_j(T)$に対する割合が $b_{ij}$ となることを示す。

時刻 T から時刻 T+1 までの $j$から $i$への総移動件数は、$b_{ij}$ が時間によらない定数であるから、

$$\int_{t=T}^{T+1} b_{ij} x_j(t) dt = b_{ij} \int_{t=T}^{T+1} x_j(t) dt$$

である。積分の平均値の定理から、$\int_{t=T}^{T+1} x_j\,(t)dt$は、$x_j(T+\theta) \quad 0 < \theta < 1$ と評価できる。

したがって、これの $x_j(T)$に対する割合は、$0<\theta<1$ で、

$$\frac{b_{ij} x_j(T+\theta)}{x_j(T)}$$

と表せる。定常状態となれば、分子の $x_j(T+\theta)$と分母の $x_j(T)$は同じとなり、$x_j(T)$に対する割合は $b_{ij}$ となる。

○また、行列 A の定常ベクトル $X^*$は、移動率行列 B の定常ベクトルでもある。$(A-I)X^*=0$（零ベクトル）であるから、

$$BX^* = \left( I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (A-I)^k \right) X^* = X^*$$

## 補注４　7.6　失業継続期間

補注 3 の移動率行列($b_{ij}$)とその前提から、失業の発生から終了（失業の状態でなくなる）までの期間の長さの期待値が、定常状態にあっては $1/(b_{12}+b_{32})$となることを導く。以下、$b_{12}+b_{32}$ を改めて γ と置く（$\gamma=1-b_{22}$ でもある）。失業状態にある者は、単位時間当たり、常にその γ の割合に相当する者が別の状態に移る、つまり失業が終了する、これが前提である。

失業の発生から終了までの期間の長さの期待値は、失業発生から時間 t だけ経過した時刻で失業が終了する確率密度関数 f(t)の期待値 $\int_{t=0}^{t=\infty} t\cdot f(t)dt$にほかならない。前提を満たすような確率密度関数を求め、期待値の計算を行う。

今は定常状態で考えるから、単位時間当たりの失業発生数(失業の発生密度)を一定とし、a と置く。発生した失業は、確率密度関数 f(t)（t は失業発生からの経過時間）の示す確率に沿って終了する。

この失業の発生密度 a と失業終了の確率密度関数 f(t)から、時刻 0 で失業状態にあって、時刻 T（≧0）においても継続して失業状態にある者（以下「継続失業者」）の数の期待値 U(T)を次のように表せる。

$$\mathrm{U(T)} = \int_{s=-\infty}^{0} \mathrm{a}ds\left(1-\int_{t=s}^{T} f(t-s)dt\right) \quad \cdots\cdots ①$$

時刻 s（＜0）から微小時間 $ds$ において a$ds$ だけ失業が発生する。時刻 s から時刻 T までの間に失業が終了する確率は$\int_{t=s}^{T} f(t-s)dt$で、$1-\int_{t=s}^{T} f(t-s)dt$が、時刻 s から時刻 T までの間に失業が終了しない確率である。これに a$ds$ を乗じた$\mathrm{a}ds\left(1-\int_{t=s}^{T} f(t-s)dt\right)$が、時刻 s に発生した失業 a$ds$ のうち、時刻 T で失業のままとなっている数の期待値となる。今は、時刻 0 で失業状態にあった者のその後の継続状況を考えるので、$\mathrm{a}ds\left(1-\int_{t=s}^{T} f(t-s)dt\right)$を、発生時刻 s=－∞から 0 まで積み上げることになる。この積み上げを示す式が①式である。

①は、次のように、時刻 T に依らない部分と依る部分とに分けられる。前者は、単位時間当たり a だけ定常的に発生してきた失業の時刻 0 における累積数（失業者数）の期待値に相当する。

$$\mathrm{U(T)} = \int_{\mathrm{s}=-\infty}^{0} \mathrm{a}ds\left(1 - \int_{\mathrm{t=s}}^{0} \mathrm{f(t-s)}dt\right) - \int_{\mathrm{s}=-\infty}^{0} \mathrm{a}ds \int_{\mathrm{t}=0}^{\mathrm{T}} \mathrm{f(t-s)}dt$$

U(T)を T で微分すると、第 1 項は T に依らないのでゼロとなり、

$$\mathrm{U'(T)} = -\mathrm{a}\int_{\mathrm{s}=-\infty}^{0} \mathrm{f(T-s)}\,ds = -\mathrm{a}\int_{\mathrm{s=T}}^{\infty} \mathrm{f(s)}ds$$

となる（二つ目の等式は、発生からの経過時間を示す変数 T‐s を改めて s と置く変換をしたもの）。U を再度 T で微分すると、

$$\mathrm{U''(T)} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{f(T)} \quad \cdots\cdots②$$

一方、失業状態にある者は、単位時間当たり γ の割合で、失業が終了するとする前提であった。継続失業者数の期待値 U(T)も、単位時間当たり γ の割合で減少していくとする。これを微分の形でいえば、

$$\mathrm{dU} = -\mathrm{dt} \cdot \gamma \mathrm{U(T)} \quad \text{或いは} \mathrm{U'(T)} = -\gamma \mathrm{U(T)} \quad \cdots\cdots③$$

②と③から、

$$\mathrm{f'(T)} = -\gamma \cdot \mathrm{f(T)}$$

が導かれる（③を T で微分して②を代入、再度 T で微分して②を代入することで得る。）。これと f(T)が確率密度関数であって、T（発生からの経過時間）を 0 から無限大まで積分すれば 1 となることから、

$$\mathrm{f(T)} = \gamma \cdot \exp(-\gamma \mathrm{T}) \quad \cdots\cdots④$$

であることがわかる。これは、最初（T=0）が γ で、以後、時間の経過とともに、指数関数的に 0 まで漸減していく関数である。

この確率密度関数④の期待値は、

$$\int_0^{\infty} \mathrm{t} \cdot f(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\infty} \mathrm{t} \cdot \gamma \exp(-\gamma \mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\mathrm{b}_{12} + \mathrm{b}_{32}}$$

である。

注　失業が終了する確率密度関数を、労働者の属性等に依らず、一種類で考

えている点は留意が必要と思われる。

参考１　時刻 T における継続失業者数の期待値 U(T)は、②から、

$$U(T)=\frac{a}{\gamma}\exp(-\gamma T)$$

と表される。常に時間当たり a だけ失業が発生し、かつ、失業発生から時間 T だけ経過したときに失業が終了する確率密度関数が④で与えられるときの失業者数の期待値は a/γ である。これは、例えば時刻 0 における失業者数の期待値$\int_{s=-\infty}^{0} a ds\left(1-\int_{t=s}^{0} f(t-s)dt\right)$を計算してみればわかる。U(0)=a/γ で、②を満たす関数が$U(T)=\frac{a}{\gamma}\exp(-\gamma T)$である。

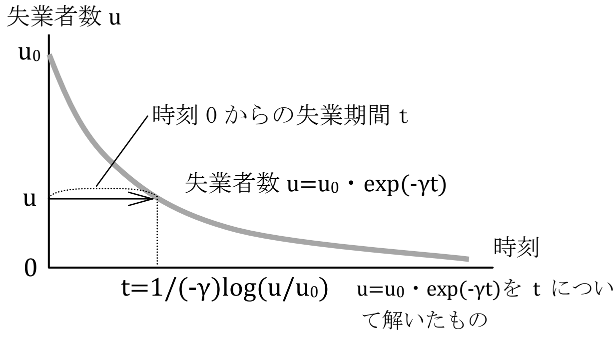
参考２　発生からの経過時間 t における失業終了の確率密度が f(t)=γ・exp(-γt)で与えられるとき、時刻 T（>0）においても失業の状態にある場合は、時刻 T 以降の各時刻 T+s（s>0）における失業終了の確率密度は γ・exp(-γs)で与えられる。同じ関数形となる。

これは、時刻 T において失業の状態にあるという条件付の確率である。時刻 T で失業状態にある確率が$1-\int_{t=0}^{T} f(t)dt$であるから、

$$\frac{f(T+s)}{1-\int_{t=0}^{T} f(t)dt}$$

である。これに、f(t)=γ・exp(-γt)を代入することで得る。

参考３　時刻 0 における失業者数 $u_0$ のうち、時刻 t において継続して失業している者の数が $u_0$・exp(-γt)で与えられるとき、$u_0$ だけいる時刻 0 における失業者の時刻 0 以降の失業期間の平均は 1／γ となる。



時刻 $t$ と $t+\Delta t$ の間に、失業者数は $u=u(t)$から $u+\Delta u=u(t+\Delta t)$に、$\Delta u=-\Delta t\gamma u(t)$だけ減る。この者たちの時刻 0 以降の失業期間は $t$ と置ける。$t$ は $u$ を使って、$t=1/(-\gamma)\log(u/u_0)$と表される。

時刻 0 における失業者($u_0$ だけいる)の失業期間の平均は、

$$\frac{1}{u_0}\int_0^{u_0} t\,du = \frac{1}{u_0}\int_0^{u_0}\frac{1}{(-\gamma)}\log\left(\frac{u}{u_0}\right)du = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{b_{12}+b_{32}}$$