III. 補注

補注1　　3.2　労働投入のディビジア指数

本文 3.2 は、労働の質を考慮した就業者数の推移を表す指数として、ディビジア指数を取り上げている。この補注では、ディビジア指数の考え方をより詳しく述べる。

今、生産に投入される労働の種類がｎ種類あるとする。以下に述べるように賃金を用いて計算するので、賃金の水準に応じて分ける。本文は性 2 区分、学歴 4 区分、年齢階級 12 区分、勤続年数階級 9 区分の別、計 864（2×4×12×9）種類としている。

このｎ種類の労働が一定の間に投入される量、労働投入量をそれぞれL_1、…L_nと置く。また、それぞれの賃金率をw_1、…w_nと置く。それぞれ延べ労働時間数（単位は人・時間）と 1 人 1 時間当たりの賃金である。ただし本文は、使用する賃金構造基本統計調査の表章に沿って、労働者数（単位は人）と 1 人当たり月間所定内給与額としている。

労働投入のディビジア指数Ｌは、次の前提Ａと前提Ｂから導かれる式⑤（又は⑥）を使って算出する。Ｌは、L_1、…L_n、w_1、…w_nの値に応じて値を変える関数であるが、以下ではw_1、…w_nを略して$L(L_1, \cdots L_n)$、または単にＬと表す。

Ａ　すべての労働の種類の組み合わせｉとｊに関し、ＬのL_iに関する偏微分係数$\partial L/\partial L_i$と、L_jに関する偏微分係数$\partial L/\partial L_j$の比は、それらの賃金率の比w_i/w_jに等しい。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{w_i}{w_j} \quad \cdots\cdots ①$$

これは簡単に言うと、労働投入が 1 単位だけ増えたときのディビジア指数の増分を労働の種類の間で比べると、それぞれの賃金率の比になるということである。労働の種類がイとロの 2 種類の場合を例にとると、種類ロ

の賃金率が種類イの2倍であれば、ロの労働投入が1単位増えたときのディビジア指数の増分は、イの労働投入が1単位増えたときのそれに比べて2倍になるということである。

B　LはL_1、…L_nに関し一次同次である。すなわちaを任意の実数として、L_1、…L_nを一斉にa倍にすると、Lもa倍となる。

$$L(aL_1, \cdots aL_n) = aL(L_1, \cdots L_n) \qquad \cdots\cdots②$$

これは、すべての生産要素が一斉にa倍になれば生産量もa倍になるという生産関数についてしばしば想定される仮定を、L_1、…L_nの関数Lに当てはめたものである。一次同次の関数については、aを任意の実数として$aL(L_1, \cdots L_n) = L(aL_1, \cdots aL_n)$であるから、両辺をaで微分することで、

$$L(L_1, \cdots L_n) = \frac{\partial L}{\partial L_1} L_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial L_n} L_n \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つ（一次同次式に関するオイラーの定理）。

注　前提Aは、n種類の労働それぞれに関して、いわゆる限界生産力命題等の成立を想定すれば成り立つ。今、労働以外の生産要素の投入量は一定とし、生産量YはL_1、…L_nのみの微分可能な関数Fで表されるとする。$Y=F(L_1, \cdots L_n)$である。生産物の価格p、各労働の種類の賃金率w_1、…w_nは所与（定数）とする。労働の総賃金コストCは、$C=w_1L_1+\cdots+w_nL_n$となる。利益は、労働以外の要素の投入に係る費用をDと置くと、$pY-(C+D)$となる。Dは、労働以外の生産要素の投入量は一定としているので一定とする。Cは労働投入量L_1、…L_nに応じて変わる。今、総賃金コストCが変わらないという条件の下で、利益$pY-(C+D)$が最大となるように、各労働の種類の労働投入量が決まるとする。そうなる必要条件は、各労働の種類の当該労働投入量における限界生産力$\partial F/\partial L_i$（$i=1, \cdots n$）が、当該労働の種類の実質賃金率w_i/pに等しいことである。これが限界生産力命題である。さらに、生産量Yの関数Fは、別の1変数の関数GとLの合成関数になるとする。すなわち、ある1変数の関数Gがあって、生産量$Y=F(L_1, \cdots L_n)=G(L(L_1, \cdots L_n))$が成り立つものとする。GはLの微分可能な関数でもあるとする。各労働の種類の限界生産力$\partial F/\partial L_i$は、FがGとLの合成関数となることから、$\partial G/\partial L \times \partial L/\partial L_i$となる（$i=1, \cdots n$）。以上から、次のとおり、①が導かれる。2番目の等式がFはGとLの合成関数であることから、3番目の等式が限界生産力命題から、それぞれ成立する。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{\frac{\partial G}{\partial L}}{\frac{\partial G}{\partial L}} \cdot \frac{\frac{\partial L}{\partial L_i}}{\frac{\partial L}{\partial L_j}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial L_i}}{\frac{\partial F}{\partial Lj}} = \frac{\frac{w_i}{p}}{\frac{w_j}{p}} = \frac{w_i}{w_j}$$

なお、①自体は、限界生産力命題の成立を必ずしも必要としない。

等式③の右辺から$\partial L/\partial L_n$を括り出し、①の関係を使うと、

$$L(L_1, \cdots L_n) = \frac{\partial L}{\partial L_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\partial L}{\partial L_k}}{\frac{\partial L}{\partial L_n}} \cdot L_k = \frac{\partial L}{\partial L_n} \cdot \frac{1}{w_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} w_k L_k = \frac{\partial L}{\partial L_n} \cdot \frac{1}{w_n} \cdot C \quad \cdots\cdots ④$$

Cは、$C=w_1L_1+\cdots+w_nL_n$で、労働の総賃金コストである。

ここで、各労働の種類の労働投入量L_iが時間の経過とともに変化した場合に、ディビジア指数Lがどのように変化するのかみる。$L(L_1、\cdots L_n)$の各変数L_1、$\cdots L_n$は、時間の経過と共に変化する時刻tの微分可能な関数と考える。$L(L_1$、$\cdots L_n)$はtの関数となる。tで微分すると、一般に、

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial L_k} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial t}$$

が成立する（w_1、…、w_nは時刻tの関数とは考えない)。①から

$$\frac{\partial L}{\partial L_k} = \frac{w_k}{w_n} \cdot \frac{\partial L}{\partial L_n}$$

であり、④から

$$\frac{\partial L}{\partial L_n} = \frac{w_n L}{C}$$

であるから、

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial L_k} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{w_n} \cdot \frac{w_n L}{C} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial t} = L \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\partial L_k}{\partial t} / L_k$$

すなわち

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

となる。⑤式は、ディビジア指数Lの満たすべき時刻tに関する微分方程式で

ある。左辺はディビジア指数Ｌの増減率に相当する。ディビジア指数とは、各労働の種類の労働投入量L_K（k＝1, … n）の増減率（$\partial L_k / \partial t$）／$L_k$を、当該労働の種類の賃金コスト$w_k L_k$が総賃金コスト$C = w_1 L_1 + \cdots + w_n L_n$に占める割合で加重平均したもので増減するものであることを⑤式は示す。そこで、

- まず、各労働の種類の労働投入量の増減率を、当該労働の種類の賃金コストが総賃金コストに占める割合で加重平均する。
- 次に、その加重平均して得た率を累乗し、ある特定時点を 100 とする各時点の値を得る。

こうして得た値をディビジア指数とする。

次に、ディビジア指数の増減率と、各労働の種類の労働投入量の単純な合計の増減率との関係をみる。そのため、各労働の種類の構成比を使った形に⑤を書き直す。労働投入量の単純な合計をＢ、各労働の種類の労働投入量の構成比をb_kと置く。

$$B = L_1 + \cdots + L_n \qquad L_k = B\,b_k$$

である。L_k、Ｂ、b_kはいずれも時刻ｔの関数である。$L_k = B\,b_k$の両辺をｔで微分すると、

$$\frac{\partial L_k}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} b_k + B \frac{\partial b_k}{\partial t}$$

これを⑤の右辺に代入する。$L_k = B\,b_k$であること、$C = w_1 L_1 + \cdots + w_n L_n$で、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} = 1$$

であることに注意して整理すると、⑤は次のとおりとなる。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k} + \frac{\frac{\partial B}{\partial t}}{B} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

この⑥が、ディビジア指数の増減率（左辺）と各労働の種類の労働投入量の単純な合計Ｂの増減率との関係がわかるように、⑤を変形した式である。ディビジア指数の増減率は、次の二つの合計であることがわかる。

ｉ　⑥右辺第１項　各労働の種類の構成比の増減率$\partial b_k / \partial t$／$b_k$を、当該労働の種類の賃金コストの総賃金コストに占める割合$w_k L_k$／Ｃで

加重平均したもの

ⅱ　⑥右辺第２項　労働投入量全体Ｂの増減率

ｉが、ディビジア指数の増減率と労働投入全体Ｂの増減率との差で、本文で「労働の質の変化率」と呼ぶ部分である。

この⑥式は、各労働の種類の賃金率w_1、…w_nの加重平均をｗ（全労働者の平均賃金率）

$$w=(w_1L_1+\cdots+w_nL_n)/(L_1+\cdots+L_n)=C/B$$

と置くと、さらに次の⑦に変形される。ここで$w=C/B$、$L_k=Bb_k$、また、構成比b_1、…b_nの合計は１であるから、各構成比の時刻ｔで微分した編微分係数の合計は０であること、すなわち、

$$\frac{\partial b_1}{\partial t}+\cdots\cdots+\frac{\partial b_n}{\partial t}=0$$

を使う。

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(w_k-w)L_k}{C}\cdot\frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k}+\frac{\frac{\partial B}{\partial t}}{B}\qquad\cdots\cdots⑦$$

これから、右辺第１項の正負、つまり労働の質の変化率と呼ぶものの正負は、各労働の種類の賃金率w_kと全体の平均ｗの差と、労働の投入量の構成比の増減率$(\partial b_k/\partial t)/b_k$の大きさなどによって決まることがわかる。

注　ｗは、w1、…、w_nの加重平均であるから、ｗとw_kとの大小関係は労働の種類ｋによって様々である。また、$\partial b_1/\partial t+\cdots+\partial b_n/\partial t=0$であるから、$\partial b_k/\partial_t$の正負は労働の種類ｋによって様々である。

特に、

・賃金率が全体の平均より高い（$w_k>w$）労働の投入量の構成比が上昇（$\partial b_k/\partial t>0$）し、

・賃金率が全体の平均より低い（$w_k<w$）労働の投入量の構成比が低下（$\partial b_k/\partial t<0$）するとき、

右辺の第１項が正となり、ディビジア指数の増減率が労働投入量全体の増減率（右辺の第２項）を上回る、つまり、労働の質の変化率と呼ぶ値が正で、労働の質が上昇することがわかる。賃金率が限界生産力に等しいとすれば、右辺の

第１項はまさに「労働の質の変化分」と呼ぶのに相応しいことがわかる。

注　賃金率が限界生産力に等しいことに加え、限界生産力の高い労働が、質の高い労働であることも暗に前提としている。ディビジア指数そのものは、賃金の高い労働者層が相対的に増えれば、労働者数の増加率よりも高い増加率となるように計算したものでしかない。

また、賃金率が労働の種類に依らない、つまり各ｋでw_k＝ｗのときは、右辺第１項は０で、ディビジア指数の増減率は労働投入量全体の増減率と同じであることなどもわかる。

（計算）

実際の計算に用いる資料は、賃金構造基本統計調査による一般労働者（短時間労働者ではない者）の統計で、労働投入量は６月末時点の労働者数、賃金率は６月分の所定内給与額である。労働者の種類は、一般労働者の性、学歴、年齢階級及び勤続年数の別とする。

⑤（又は⑥）は時刻ｔの微分可能な関数の微分方程式で、これを賃金構造基本統計調査のような１年に１回、特定月の統計に当てはめなくてはならない。

そのため、ｔを年単位の連続変数と考え、⑤を時刻ｔ年からｔ＋1 年まで積分する。

$$\int_t^{t+1} \frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k} dt$$

すなわち、

$$\ln\bigl(L(t+1)\bigr) - \ln\bigl(L(t)\bigr) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k} dt \qquad \cdots\cdots ⑧$$

ここで ln は自然対数関数である。

注　一般にｔの関数ｆ(t)（＞0）の微分 df/dt をｆで割った（df/dt）／ｆの積分は ln(f)である。

$$\int_a^b \frac{\frac{df}{dt}}{f(t)} dt = \ln\bigl(f(b)\bigr) - \ln\,(f(a))$$

また、

$$\ln\bigl(f(b)\bigr) - \ln\bigl(f(a)\bigr) = \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) \cong \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$$

であるから、ln(f(b))-ln(f(a))は、f(b)のf(a)に対する増減率に相当する。

右辺のΣの中の各項は、積分形の平均値の定理から、0以上1以下のあるθ_kがあって、$t+\theta_k$における

$$\frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial L_k}{\partial t}}{L_k}$$

の値に等しいが、これは、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{w_k L_k}{C}(t+1) + \frac{w_k L_k}{C}(t)\right) \times \left(\ln\left(L_k(t+1)\right) - \ln\left(L_k(t)\right)\right)$$

で近似される。本文は、$w_k L_k / C$をV_{seta}、L_kをB_{seta}と表している。

実際の計算は、2010年のディビジア指数であれば、まず性、学歴、年齢階級、勤続年数の別に次の率を計算し合計する。これが⑧の右辺に相当し、⑧の左辺ln(L(2010年))-ln(L(2009年))の値である。

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{当該性、学歴、年齢階級、勤続年数 2010 年所定内給与額×労働者数}}{\text{性、学歴、年齢階級、勤続年数別 2010 年所定内給与額×労働者数の合計}} + \frac{\text{当該性、学歴、年齢階級、勤続年数の 2009 年所定内給与額×労働者数}}{\text{性、学歴、年齢階級、勤続年数別の 2009 年所定内給与額×労働者数の合計}}\right]$$

×当該性、学歴、年齢階級、勤続年数の2010年の労働者数の2009年に対する増減率

一方、⑥を時刻tからt+1まで積分すると、

$$\int_t^{t+1} \frac{\frac{\partial L}{\partial t}}{L} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k} dt + \int_t^{t+1} \frac{\frac{\partial B}{\partial t}}{B} dt$$

すなわち、

$$\ln\left(L(t+1)\right) - \ln\left(L(t)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_t^{t+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k} dt + \ln\left(B(t+1)\right) - \ln\left(B(t)\right) \quad \cdots\cdots ⑨$$

右辺のln(B(t+1))-ln(B(t))は、2010年のディビジア指数でいえば、賃金構造

基本統計調査による2010年と2009年の一般労働者数の対数値の差（一般労働者数の増減率）である。この⑨式より、先に求めた

ln(L(2010年))-ln(L(2009年))

からこの ln(B(2010年))-ln(B(2010年))を差し引いて得た値が、

$$\left\{\ln\left(L\left(2010\text{年}\right)\right)-\ln\left(L\left(2009\text{年}\right)\right)\right\}-\left\{\ln\left(B\left(2010\text{年}\right)\right)-\ln\left(B\left(2009\text{年}\right)\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{2009}^{2010}\frac{w_k L_k}{C}\cdot\frac{\frac{\partial b_k}{\partial t}}{b_k}dt$$

であるから、2009年から2010年にかけての労働の質の変化率に相当する値となる。

（本文　表3−2について）

こうして求めた各年の労働の質の変化率を累積する（「１＋変化率」を掛け合わせる）ことで、特定年（2005年）を100とする各年の労働の質を表す指数を求める。これが表3−2の左側の列である。表3−2の真中の列は、総務省「労働力調査」による各年の年平均就業者数を、特定年（2005年）を100とする指数に直したものである。最後に、労働の質の変化を表す指数と就業者数を表す指数を乗じて100で割り、特定年（2005年）を100とする「労働の質を考慮した就業者数」の指数とする。これが表3−2の右側の列である。計算過程の四捨五入の関係で、1列目と2列目の積が3列目と必ずしも一致しない。

なお、表 3−2 の右側の列の「労働の質を考慮した就業者数」は、先に賃金構造基本統計調査を使って求めた⑧のＬではない。賃金構造基本統計調査の一般労働者について求めた「労働の質の変化率」をそのまま、労働力調査の就業者数に当てはめて得たものである。また、「労働の質を考慮した就業者数」の指数は、⑧、⑨式に即せば、就業者数を表す指数（真中の列）について対数値の差をとり、それに左側の列の指数の増減率（労働の質の変化率）を加えて得た値xの指数関数値 exp(x)で増減させて得るところである。しかし、本文表3-2は近似計算で、左側の列の指数×真中の列の指数÷100として得ている。

補注2　　7.6　フロー確率行列の収束について

（本書の範囲では３次の正方行列について収束を示せば事足りるが、一般に成り立つ性質なので、一般の行列について説明する。）

n 次元の正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ について $a_{ij}>0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$ とする。

１）正値、列和の継承性

この行列の m 乗を $A^m=\left(a_{ij}^{(m)}\right)$ と書くことにすれば

$A^{m+1}=AA^m=A^mA$ 　であるので

$$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)}a_{kj}$$ 　となり、

$$a_{ij}^{(m)}>0,\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m)}=1$$ が成立すれば、

$$a_{ij}^{(m+1)}>0$$ 　は明らかであり、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^{(m)}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^{(m)}=1$$

となる。

従って、数学的帰納法により、全ての m について $a_{ij}^{(m)}>0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(m)}=1$ となる。

２）各行の最大値、最小値の評価

行列 A の要素 a_{ij} の最小値を γ とする。

A の列和が１であるので、$0 < \gamma \le \dfrac{1}{n}$ ――――（１）

が成立する。また、A^m の i 行 $a_{ik}^{(m)}$ $(k = 1,2,\cdots,n)$の最大値を $g_i^{(m)}$ 、最小値を $l_i^{(m)}$ とし、この時実際に最大値、最小値を取る k の値（の代表）をそれぞれ k_g、k_l とする。

$A^{m+1} = A^m A$ における i 行を考えてみる。

$$\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}^{(m)} a_{i2}^{(m)} \cdots a_{in}^{(m)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kj} \cdots a_{kn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = a_{ik_l}^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \ne k_l} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \ne k_l} a_{ik}^{(m)} a_{kj}$$

右辺の第２項を $g_i^{(m)}$ で評価すると

$$a_{ij}^{(m+1)} \le l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \ne k_l} g_i^{(m)} a_{kj} = (l_i^{(m)} - g_i^{(m)}) a_{k_l j} + \sum_{k=1}^{n} g_i^{(m)} a_{kj} =$$

$$(l_i^{(m)} - g_i^{(m)}) a_{k_l j} + g_i^{(m)} = g_i^{(m)} - a_{k_l j}(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \le g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \text{――（２）}$$

同様にして $l_i^{(m)}$ で評価すると、

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = a_{ik_g}^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} a_{ik}^{(m)} a_{kj}$$

$$\geq g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} l_i^{(m)} a_{kj} = (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{k_g j} + \sum_{k=1}^{n} l_i^{(m)} a_{kj} =$$

$$(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{k_g j} + l_i^{(m)} \geq l_i^{(m)} + \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \quad \text{————（３）}$$

（２）、（３）は、A^m の各 i 行を（n 個の個別ウェイトで）加重平均したものとなっている A^{m+1} の各 i 行は、① A^m の i 行の最大値、② A^m の i 行の最小値及び③（ウェイトである）A の最小値という（i に依存する）３つの要素のみで評価できることを表している。

３）各行の最大値、最小値の収束

（２）、（３）により A^{m+1} の各 i 行の $a_{ij}^{(m+1)}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ について以下の不等式が成立する。

$$l_i^{(m)} + \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq a_{ij}^{(m+1)} \leq g_i^{(m)} - \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

これにより、最大値、最小値の定義から直ちに以下の不等式が成り立つ。

$$l_i^{(m)} + \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq l_i^{(m+1)} \leq a_{ij}^{(m+1)} \leq g_i^{(m+1)} \leq g_i^{(m)} - \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

$$\text{——（４）}$$

また、 $g_i^{(m)} - l_i^{(m)} \geq 0$ より

$l_i^{(m)} \leq l_i^{(m)} + \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$ と

$g_i^{(m)} - \gamma (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq g_i^{(m)}$ は明らかである。

従って、数列 $g_i^{(m)}$ と $l_i^{(m)}$ とはそれぞれ単調有界数列となり極限が存在する。

4）行列の収束

上記で存在が確認できた数列 $g_i^{(m)}$ と $l_i^{(m)}$ の極限をそれぞれ g_i、l_i とする。

この時 $g_i = l_i$ となることが以下のようにして示される。

（4）式により、

$$g_i^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$
$$-l_i^{(m+1)} \le -l_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

辺々をそれぞれ足し合わせれば

$$g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - l_i^{(m)} - 2\gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) = (1-2\gamma)(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

よって

$$0 \le g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \le (1-2\gamma)^m (g_i^{(1)} - l_i^{(1)}) \quad \text{———（５）}$$

（1）により、$n \ge 2$ であれば　$0 \le 1-2\gamma < 1$ となるので、

$m \to \infty$ の時（5）式の右辺 $\to 0$ となり、$g_i = l_i$ となる。

（$n = 1$ の場合は $A = (1)$ となり、自明。）

この極限値を改めて α_i と書けば、（4）式は i 行の各要素 $a_{ij}^{(m+1)}$ が全て α_i に収束することを表している。

従って $m \to \infty$ の時の A^m の極限を A^* と書けば

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_1 \\ \alpha_2 \cdots \alpha_2 \\ \vdots \ \cdots \ \vdots \\ \alpha_\mathrm{n} \cdots \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり、$\alpha_i > 0$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$。

さらに、$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{(m)}$ の極限を考えると

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k \quad \text{———（６）}$$

となる。

５）状態ベクトルの極限

状態ベクトルをフロー確率行列 A を用いて $X(t)=A^t X(0)$（$t=1,2,\cdots$）

で定義すれば、その初期値 $X(0)$ に依存する極限 $X^*\big|_{X(0)}$ は

$X^*\big|_{X(0)}=\lim_{t\to\infty}X(t)=\lim_{t\to\infty}A^t X(0)=(\lim_{t\to\infty}A^t)X(0)=A^* X(0)$ となる。

$X(0)$ の成分について $\sum_{j=1}^{n}x_j(0)=1$ が成り立っているので、

$X^*\big|_{X(0)}=A^* X(0)$ の各成分 $x_j^*\big|_{X(0)}$ は

$x_j^*\big|_{X(0)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_j x_i(0)=\alpha_j\sum_{i=1}^{n}x_i(0)=\alpha_j$ となり、

実は初期値に関係なく一定の状態に収束する。

その初期値 $X(0)$ に依存しない極限を改めて X^* と書く。

６）定常状態

$A^* X^*$ の第 i 成分を考えてみると $\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j=\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\alpha_i$ となり

$A^* X^*=X^*$ となっている。

また、同様に AX^* の第 i 成分を考えると $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j$ となり（６）式によりこ

れは α_i に等しくなり　$AX^*=X^*$　となっている。

つまり、X^* は A と A^* の両方に対応した定常状態となっている。

補注3　7.6　１か月未満の流出入を考慮したフロー確率行列について

「単位期間内の j から i への移動件数は、j の人数に比例する」を仮定する。時点 t から時点 $t+\Delta t$ までの移動件数は、j から i への変化の比例係数を r_{ij} とすると、流出分と流入分を考えることにより、

$$x_j(t+\Delta t) - x_j(t) = \Delta t \cdot \{-\sum_{i \neq j} r_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{i \neq j} r_{ji} \cdot x_i(t)\}$$ となる。

ここで　$r_{jj} = 1 - \sum_{i \neq j} r_{ij}$　と定義すれば

$$x_j(t+\Delta t) - x_j(t) = \Delta t \cdot \{(r_{jj}-1) \cdot x_j(t) + \sum_{i \neq j} r_{ji} \cdot x_i(t)\} \text{———}（1）$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11}r_{12}r_{13} \\ r_{21}r_{22}r_{23} \\ r_{31}r_{32}r_{33} \end{pmatrix}$$ とおけば（１）式の行列表示は I を単位行列として

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \Delta t \cdot (R-I)X(t)$$ となる。

従って、$$\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = (R-I)X(t)$$

$\Delta t \to 0$　とすると

$$\frac{dX(t)}{dt} = (R-I)X(t) \quad \text{———}（２）$$

ここで、一般の正方行列 F に対して、整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$（収束半径を $\rho > 0$ とする）が与えられた時に、行列 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k F^k$ を各要素ごとの無限級数を要素として持つ行列として定義すれば、F の固有値の絶対値が全て ρ より小さい時（すなわち F のノルム $\|F\|$ が ρ より小さい時）この行列（の要素である各級

数）は収束することが知られている。

従って、$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ の収束半径は∞なので、任意の F に対して

$e^F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k}{k!}$ が定義できる。（ただし、$F^0 = I$ ） この時 $FG = GF$

が成り立てば、$e^{F+G} = e^F e^G$ となることも知られている。

このことを使えば微分方程式（２）の基本解は

$$e^{t(R-I)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k \quad \text{（ただし、任意の } t \text{ について } t^0 = 1\text{）}$$

で与えられる。

（項別微分すれば

$$\frac{de^{t(R-I)}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(R-I)^k = (R-I)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(R-I)^{k-1} = (R-I)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k$$

となることがわかる。）

従って、$X(0)$ を初期ベクトルとすれば、$t = 0$ の時

$e^{t(R-I)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k$ は I となるので、

$$X(t) = e^{t(R-I)}X(0) \quad \text{———} \quad （３）$$

は初期条件を満たす（２）の解であることが確認できる。

（３）で $t = T+1$ とすれば

$$X(T+1) = e^{(T+1)(R-I)}X(0) = e^{(R-I)+T(R-I)}X(0) = e^{R-I}e^{T(R-I)}X(0) = e^{R-I}X(T)$$

$X(T+1) = AX(T)$ であったので

$$A = e^{(R-I)} \quad \text{————} \quad （４）$$

となる。

ここで対数関数のマクローリン展開

$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$　（$|x|<1$）を考えると、対応する行列 F の級数表現は

$\log(I+F)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}F^k$　（$\|F\|<1$）となり、この行列は

$e^{\log(I+F)}=I+F$　を満たす。

F のノルム $\|F\|$ の評価は　$\|F\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|$　（f_{ij} は F の要素）となるので、

A がマルコフ行列であること（要素の非負性及び行和が 1 となること）を考慮すれば

$$\left|a_{jj}-1\right|+\sum_{i\neq j}\left|a_{ij}\right|=1-a_{jj}+\sum_{i\neq j}a_{ij}=1-a_{jj}+1-a_{jj}=2\cdot(1-a_{jj})<1$$

であれば上記のノルムの条件を満たす。従って、例えば A の対角成分が全て 0.5 より大きい時に

$\log(A)$　は　$\log(A)=\log(I+(A-I))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$

により定義できることがわかる。

従って、行列 R は（4）式より

　$R-I=\log(A)$　すなわち

　$R=I+\log(A)$　――――（5）

と表せる。

次に、B の定常状態について考える。

期間 T から期間 $T+1$ までの j から i への移動総件数は r_{ij} と $x_j(t)$ を使って

$\int_T^{T+1}r_{ij}x_j(t)dt$　と表せるので　B の（i，j）成分（$i\neq j$）は、

$$b_{ij} = \frac{\int_T^{T+1} r_{ij} x_j(t)dt}{x_j(T)} = r_{ij} \frac{\int_T^{T+1} x_j(t)dt}{x_j(T)}$$ となる。

積分の平均値の定理を使えば $\int_T^{T+1} x_j(t)dt = x_j(T+\theta_T) \quad (0 < \theta_T < 1)$

と評価できるので、状態ベクトル $X(t)$ が定常状態に近づけば $b_{ij} \to r_{ij}$ となる。

また、この時　r_{jj} の定義より　$b_{jj} \to r_{jj}$　は明らかで、結局　$B \to R$　となる。従って定常状態においては　$B = R$　となる。

A の定常ベクトル X^* について $(A-I)X^* = O$（O は零ベクトル）を考慮して BX^* を計算してみると、B の定常状態では $B = R$ であるので、

$$BX^* = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (A-I)^k \right) X^* = X^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (A-I)^k X^* = X^*$$

となり X^* は $B(=R)$ の定常ベクトルともなっていることが確認できる。

補注4　　7.6　失業継続期間の推計について

「失業継続期間」とは失業が発生してから失業状態が終了するまでの期間の期待値（平均的な失業期間）である。

失業が発生してからt期間継続する確率を$P(t)$、失業継続期間を$\overline{T}$とすると、

$\overline{T}=\int_0^{\infty}P(t)dt$　となる。

このことは次のようにして確かめられる。

t期間継続する確率$P(t)$とは、失業発生時を時点0として時点tで失業が続いているものの割合となる。

一方、失業の終了の確率密度関数を$f(t)$とすれば、時点Tまでに失業が終了する累積確率$Pob(t\le T)$は

$Pob(t\le T)=\int_0^{T}f(t)dt$　で与えられる。

この時　$\dfrac{dPob(t\le T)}{dT}=f(T)$となり、$\overline{T}$は確率変数の期待値の定義に従うと$\overline{T}=\int_0^{\infty}tf(t)dt$となる。

また、$P(t)$と$Pob(t\le T)$の関係を考えると、

$$P(T)=1-Pob(t\le T)=1-\int_0^{T}f(t)dt=\int_0^{\infty}f(t)dt-\int_0^{T}f(t)dt=\int_T^{\infty}f(t)dt$$

となり（$\because\int_0^{\infty}f(t)dt=1$）、$\dfrac{dP(t)}{dt}=-f(t)$となる。

上記の準備の下で、$\int_0^{\infty}P(t)dt$について考える。

$\int_0^{\infty}P(t)dt=\lim_{S\to\infty}\int_0^{S}P(t)dt$　であるので、$\int_0^{S}P(t)dt$について考えてみる。部分積分すれば

$$\int_0^{S}P(t)dt=\left[tP(t)\right]_0^{S}-\int_0^{S}t\frac{dP(t)}{dt}dt=S\int_S^{\infty}f(t)dt+\int_0^{S}tf(t)dt$$

ここで、被積分区間では $S \leq t$ であることに注意して $S\int_S^\infty f(t)dt$ を評価すると（$\overline{T} = \int_0^\infty tf(t)dt$ の収束を仮定して）

$$0 \leq S\int_S^\infty f(t)dt \leq \int_S^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty tf(t)dt - \int_0^S tf(t)dt \to 0 \quad (S \to \infty)$$

従って、$S \to \infty$ の時 $\int_0^S P(t)dt \to \int_0^\infty tf(t)dt = \overline{T}$ を得る。

一方、失業からの流出率が一定だと仮定すると、継続失業者についても流出率は等しいという自然な仮定の下で、t 時点での継続失業者数を $u(t)$、（共通の）流出率を r とすれば微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t)$$

が成り立つ。

これを解けば $u(t) = \exp(-rt)u(0)$ となる。

定義を考えれば $P(t) = \dfrac{u(t)}{u(0)}$ であるので、結局、

$P(t) = \exp(-rt)$ となり、

$$\int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \exp(-rt)dt = \left[-\frac{\exp(-rt)}{r}\right]_0^\infty = \frac{1}{r}$$

となる。

流出先を考えると流出率は $r = b_{12} + b_{32}$ となるので

$$\overline{T} = \frac{1}{b_{12} + b_{32}} = \frac{u}{b_{12}u + b_{32}u}$$

を得る。