Ⅲ．補注

補注１　　３．２．ディビジア労働投入量の離散近似について

$L=\sum_i A_i B_i$ で定義される労働投入コストについて考える。

（A は所定内給与、B は労働者数、i は性、学歴、勤続年数及び年齢階級の組み合わせを表す添え字）

時間微分をドットで表すと

$\dot{L}=\sum_i(\dot{A}_i B_i+A_i\dot{B}_i)$ となり

$$\frac{\dot{L}}{L}=\sum_i\left(\frac{\dot{A}_iB_i}{L}+\frac{A_i\dot{B}_i}{L}\right)=\sum_i\left(\frac{\dot{A}_iB_i}{A_i}\frac{A_i}{L}+\frac{A_i\dot{B}_i}{B_i}\frac{B_i}{L}\right)=\sum_i\left\{\left(\frac{\dot{A}_i}{A_i}+\frac{\dot{B}_i}{B_i}\right)\left(\frac{A_iB_i}{L}\right)\right\}$$

$\frac{A_iB_i}{L}=v_i$ と書けば

$\frac{\dot{L}}{L}=\sum_i v_i\left(\frac{\dot{A}_i}{A_i}+\frac{\dot{B}_i}{B_i}\right)$　となる。　（$\sum_i v_i=1$）

ここで所定内賃金の変化率を表す $\frac{\dot{A}_i}{A_i}$ を無視すれば賃金の変動を取り除くことができ、最終的にいた労働者数の変化の影響のみを分析することができる。そこで、$\frac{\dot{A}_i}{A_i}$ を取り除いたものについても、記号の濫用で、同じ $\frac{\dot{L}}{L}$ で表すことにすれば

$\frac{\dot{L}}{L}=\sum_i v_i\frac{\dot{B}_i}{B_i}$ ―――（１）となる。

ここで　$B_i=b_iB$　とすれば　$\frac{\dot{B}_i}{B_i}=\frac{\dot{b}_i}{b_i}+\frac{\dot{B}}{B}$　となるので（１）は

$\frac{\dot{L}}{L}=\sum_i v_i\left(\frac{\dot{b}_i}{b_i}+\frac{\dot{B}}{B}\right)=\left(\sum_i v_i\frac{\dot{b}_i}{b_i}\right)+\frac{\dot{B}}{B}$ ―――（２）となり、（２）式の右辺の第１項を労働の質の変化率と本書では呼んでいる。

これを更なる記号の濫用で、同じ $\frac{\dot{L}}{L}$ で表すことにすれば

$$\frac{\dot{L}}{L} = \sum_i v_i \frac{\dot{b}_i}{b_i} \text{———}（３）$$ となる。

（３）の両辺を時間 t で $T-\Delta T$ から T まで積分すると

$$\int_{T-\Delta T}^{T} \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}dt = \int_{T-\Delta T}^{T} \sum_i \frac{v_i}{b_i}\frac{db_i}{dt}dt = \sum_i \int_{T-\Delta T}^{T} \frac{v_i}{b_i}\frac{db_i}{dt}dt \text{———}（４）$$

（４）の右辺の各 i について $\frac{db_i}{dt}$ の被積分区間での定符号性を仮定すると積分の平均値の定理が適用でき、（４）は

$$\ln L(T) - \ln L(T-\Delta T) =$$

$$\sum_i v_i(T-\theta_i \Delta T)\{\ln b_i(T) - \ln b_i(T-\Delta T)\} \text{———}（５）$$

$$（0 \le \theta_i \le 1）$$

となる。

（$v_i(T-\theta_i \Delta T)$ は、関数 v_i が区間 $[T-\Delta T, T]$ で取る値のいずれかとなる。）

（５）の $\Delta T = 1$ の時の離散近似を考える時、関数 v_i の値として端点での値の平均を採用することとすれば

$$\ln L(T) - \ln L(T-1) = \sum_i \frac{v_i(T) + v_i(T-1)}{2}\{\ln b_i(T) - \ln b_i(T-1)\}$$

となる。

補注２　３．２．労働サービスのディビジア指数について

今、L を L_i（$i=1,\cdots,n$）の関数と考える。

$L = L(L_1,\cdots,L_n)$　（この時点では関数形を仮定していない。）

また、ここでの L は前項までの L とは意味が違うことにも留意する必要がある。

この時　$\ln L$ を $\ln L_i$ の関数と考え時間 t で微分すると

$$\frac{d\ln L}{dt} = \sum \frac{\partial \ln L}{\partial \ln L_i}\frac{d\ln L_i}{dt}$$

よって時間微分をドットで表せば

$$\frac{\dot{L}}{L} = \sum \frac{\partial \ln L}{\partial \ln L_i}\frac{\dot{L}_i}{L_i} \quad \text{――――――（１）}$$

となる。

また、合成関数の微分を考えると

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \ln L_i} = \frac{d\ln L}{dL}\frac{\partial L}{\partial L_i}\frac{dL_i}{d\ln L_i} = \frac{\partial L}{\partial L_i}\frac{L_i}{L} \quad \text{――――――（２）となる。}$$

ここで労働サービスの投入について、完全競争下の限界生産力の仮定により、偏微分係数は単位労働当たりの賃金（w）の比で表されるとすると

$\frac{\partial L}{\partial L_i} = \frac{w_i}{w}$ となり　（２）により　$\frac{\partial \ln L}{\partial \ln L_i} = \frac{w_i}{w}\frac{L_i}{L} = v_i$　――――――（３）

となる。

（v_i は L_i のコストシェア）

（３）を（１）に代入すると、結局

$\frac{\dot{L}}{L} = \sum v_i \frac{\dot{L}_i}{L_i}$　が成り立つ。

補注３　７．６．フロー確率行列の収束について

n 次元の正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ について $a_{ij}>0$，$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$ とする。

（正値、列和の継承性）

この行列の m 乗を $A^{m}=\left(a_{ij}^{(m)}\right)$ と書くことにすれば

$A^{m+1}=AA^{m}=A^{m}A$　であるので

$a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(m)}a_{kj}$　となり、

$a_{ij}^{(m)}>0$，$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m)}=1$ が成立すれば、

$a_{ij}^{(m+1)}>0$　は明らかであり、

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m+1)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^{(m)}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^{(m)}=1$$

となる。

従って、数学的帰納法により、全ての m について $a_{ij}^{(m)}>0$，$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(m)}=1$ となる。

（各行の最大値、最小値の評価）

行列 A の要素 a_{ij} の最小値を γ とする。

A の列和が１であるので、$0<\gamma\le\frac{1}{n}$　―――（１）が成立する

また、A^{m} の i 行 $a_{ik}^{(m)}$　$(k=1,2,\cdots,n)$　の最大値を $g_{i}^{(m)}$、最小値を $l_{i}^{(m)}$ とする。

この時実際に最大値、最小値を取る k の値（の代表）をそれぞれ k_g、k_l とする。

$A^{m+1} = A^m A$ における i 行を考えてみる。

$$\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}^{(m)} a_{i2}^{(m)} \cdots a_{in}^{(m)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{kj} \cdots a_{kj} \cdots a_{kn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = a_{ik_l}^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \neq k_l} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \neq k_l} a_{ik}^{(m)} a_{kj}$$

右辺の第２項を $g_i^{(m)}$ で評価すると

$$a_{ij}^{(m+1)} \leq l_i^{(m)} a_{k_l j} + \sum_{k \neq k_l} g_i^{(m)} a_{kj} = (l_i^{(m)} - g_i^{(m)}) a_{k_l j} + \sum_{k=1}^{n} g_i^{(m)} a_{kj} =$$

$$(l_i^{(m)} - g_i^{(m)}) a_{k_l j} + g_i^{(m)} = g_i^{(m)} - a_{k_l j}(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \leq g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \quad \text{——————（２）}$$

同様にして $l_i^{(m)}$ で評価すると、

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = a_{ik_g}^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} a_{ik}^{(m)} a_{kj} = g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} a_{ik}^{(m)} a_{kj}$$

$$\geq g_i^{(m)} a_{k_g j} + \sum_{k \neq k_g} l_i^{(m)} a_{kj} = (g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{k_g j} + \sum_{k=1}^{n} l_i^{(m)} a_{kj} =$$

$$(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) a_{k_g j} + l_i^{(m)} \geq l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \quad \text{——————（３）}$$

（２）、（３）は A^m の各 i 行を（n 個の個別ウェイトで）加重平均したものとなっている A^{m+1} の各 i 行は元の数値の最大値と最小値とウェイトの中の最小のものとで評価できることを表している。

（各行の最大値、最小値の収束）

（２）、（３）により A^{m+1} の各 i 行の $a_{ij}^{(m+1)}$ $(j=1,2,\cdots,n)$について以下の不等式が成立する。

$$l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \le a_{ij}^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

これにより、最大値、最小値の定義から直ちに以下の不等式が成り立つ。

$$l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \le l_i^{(m+1)} \le a_{ij}^{(m+1)} \le g_i^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \quad \text{——（４）}$$

また、 $l_i^{(m)} \le l_i^{(m)} + \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$ と $g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) \le g_i^{(m)}$ は明らかである。

従って、数列 $g_i^{(m)}$ と $l_i^{(m)}$ とは単調有界数列となり極限が存在する。

（行列の収束）

数列 $g_i^{(m)}$ と $l_i^{(m)}$ の極限をそれぞれ g_i、l_i とする。この時 $g_i = l_i$ となることが以下のようにして示される。

（４）式により、

$$g_i^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

$$-l_i^{(m+1)} \le -l_i^{(m)} - \gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

辺々をそれぞれ足し合わせれば

$$g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \le g_i^{(m)} - l_i^{(m)} - 2\gamma(g_i^{(m)} - l_i^{(m)}) = (1-2\gamma)(g_i^{(m)} - l_i^{(m)})$$

よって

$$0 \le g_i^{(m+1)} - l_i^{(m+1)} \le (1-2\gamma)^m (g_i^{(1)} - l_i^{(1)}) \quad \text{————（５）}$$

（1）により、$n \geq 2$ であれば　$0 \leq 1-2\gamma < 1$ となるので、

$m \to \infty$ の時（5）式の右辺 $\to 0$ となり、$g_i = l_i$ となる。

（$n=1$ の場合は $A=(1)$ となり、自明。）

この極限値を改めて α_i と書けば、（4）式は i 行の各要素 $a_{ij}^{(m+1)}$ が全て α_i に収束することを表している。

従って $m \to \infty$ の時

$$A^m \to A^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_1 \\ \alpha_2 \cdots \alpha_2 \\ \vdots \ \cdots \ \vdots \\ \alpha_n \cdots \alpha_n \end{pmatrix}$$ となり、$\alpha_i > 0$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$。

さらに、$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^{(m)}$ の極限を考えると $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_k$ ――――（6）

となる。

（状態ベクトルの極限）

状態ベクトルは $X(t) = A^t X(0)$ （$t = 1, 2, \cdots$）と書け、その $X(0)$ に依存する極限 $X^*\big|_{X(0)}$ は

$X^*\big|_{X(0)} = \lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{t\to\infty} A^t X(0) = (\lim_{t\to\infty} A^t) X(0) = A^* X(0)$ となる。

$X(0)$ の成分について $\sum_{j=1}^{n} x_j(0) = 1$ が成り立っているので、

$X^*\big|_{X(0)} = A^* X(0)$ の各成分 $x_j^*\big|_{X(0)}$ は

$$x_j^*\Big|_{X(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j x_i(0) = \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_i(0) = \alpha_j$$ となり、

実は初期値に関係なく一定の状態に収束する。

その $X(0)$ に依存しない極限を改めて X^* と書く。

（定常ベクトル）

$A^* X^*$ の第 i 成分を考えてみると $\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j = \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \alpha_i$ となり

$A^* X^* = X^*$ となっている。

また、同様に AX^* の第 i 成分を考えると $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j$ となり（６）式によりこれ

は α_i に等しくなる。

つまり　$AX^* = X^*$　ともなっている。

補注４　７．６．１ヶ月未満の流出入を考慮したフロー確率行列について

「単位期間内の j から i への移動件数は、 j の人数に比例する」を仮定する。
時点 t から時点 t ＋Δ t までの移動件数は、j から i への比例係数を r_{ij} とすると、流出分と流入分を考えることにより、

$$x_j(t+\Delta t) - x_j(t) = \Delta t \cdot \{-\sum_{i \neq j} r_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{i \neq j} r_{ji} \cdot x_i(t)\}$$ となる。

ここで　$r_{jj} = 1 - \sum_{i \neq j} r_{ij}$　と定義すれば

$$x_j(t+\Delta t) - x_j(t) = \Delta t \cdot \{(r_{jj} - 1) \cdot x_j(t) + \sum_{i \neq j} r_{ji} \cdot x_i(t)\}$$ ───（１）式

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} r_{12} r_{13} \\ r_{21} r_{22} r_{23} \\ r_{31} r_{32} r_{33} \end{pmatrix}$$ とおけば（１）式の行列表示は I を単位行列として

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \Delta t \cdot (R-I) X(t)$$ となる。

従って、$\dfrac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = (R-I)X(t)$

$\Delta t \to 0$　とすると

$$\frac{dX(t)}{dt} = (R-I)X(t)$$ ───（２）

ここで、一般の正方行列 F に対して、整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ （収束半径をρ＞０とする）が与えられた時に行列 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k F^k$ を各要素ごとの無限級数として定義すれば、F の固有値の絶対値が全てρより小さい時(すなわち F のノルム $\|F\|$ がρより小さい時) この級数は収束することが知られている。

従って、$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$　の収束半径は∞なので、任意の F に対して

$e^F = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!} F^k$　が定義できる。(ただし、$F^0 = I$　)　この時 $FG = GF$ が成り立てば、$e^{F+G} = e^F e^G$　となることも知られている。

このことを使えば微分方程式（２）の基本解は

$$e^{t(R-I)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k$$

で与えられる。

（項別微分すれば

$$\frac{de^{t(R-I)}}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(R-I)^k = (R-I)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(R-I)^{k-1} = (R-I)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k$$

となることがわかる。）

従って、$X(0)$ を初期ベクトルとすれば、$t=0$ の時 $e^{t(R-I)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(R-I)^k$

は I となるので、

$$X(t) = e^{t(R-I)} X(0) \quad \text{———} \quad （３）$$

は初期条件を満たす（２）の解であることが確認できる。

（３）で　$t = T+1$　とすれば

$$X(T+1) = e^{(T+1)(R-I)}X(0) = e^{(R-I)+T(R-I)}X(0) = e^{R-I}e^{T(R-I)}X(0) = e^{R-I}X(T)$$

$X(T+1) = AX(T)$ であったので

$$A = e^{(R-I)} \quad \text{————} \quad （４）$$

となる。

ここで対数関数のマクローリン展開

$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$　（$|x| < 1$）を考えると、対応する行列 F の級数表現は

$\log(I+F) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} F^k$　（$\|F\| < 1$）となり、この行列は

$e^{\log(I+F)} = I + F$　を満たす。

F のノルム $\|F\|$ の評価は　$\|F\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|$　（f_{ij} は F の要素）となるので、

A がマルコフ行列であること（要素の非負性及び行和が１となること）を考慮すれば

$$|a_{jj} - 1| + \sum_{i \ne j} |a_{ij}| = 1 - a_{jj} + \sum_{i \ne j} a_{ij} = 1 - a_{jj} + 1 - a_{jj} = 2 \cdot (1 - a_{jj}) < 1$$

であれば上記のノルムの条件を満たす。従ってAの対角成分が全て0.5より大きい時に

$\log(A)$ は $\log(A)=\log(I+(A-I))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k$

により定義できることがわかる。
従って、（4）式より

$R-I=\log(A)$ すなわち

$R=I+\log(A)$ ————（5）

となる。

一方、B について考える。
期間Tから期間$T+1$までのjからiへの移動総件数はr_{ij}と$x_j(t)$を使って

$\int_T^{T+1} r_{ij}x_j(t)dt$ と表せるので Bの（i, j）成分は、

$$b_{ij}=\frac{\int_T^{T+1} r_{ij}x_j(t)dt}{x_j(T)}=r_{ij}\frac{\int_T^{T+1} x_j(t)dt}{x_j(T)}$$ となる。

積分の平均値の定理を使えば$\int_T^{T+1} x_j(t)dt=x_j(T+\theta_T)\quad(0<\theta_T<1)$と評価できるので、状態ベクトル$X(t)$が定常状態に近づけば$b_{ij}\to r_{ij}$となる。
また、この時 r_{jj}の定義より $b_{jj}\to r_{jj}$ は明らかで、結局 $B\to R$ となる。従って定常状態においては $B=R$ となる。

Aの定常ベクトルX^*について$(A-I)X^*=O$（Oは零ベクトル）を考慮してBX^*を計算してみると

$$BX^*=\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^k\right)X^*=X^*+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-I)^kX^*=X^*$$

となりBの定常ベクトルともなっていることが確認できる。

補注５　７．６．失業継続期間の推計について

「失業継続期間」とは失業が発生してから失業状態が終了するまでの期間の期待値である。

失業が発生してから t 期間継続する確率を $P(t)$、失業継続期間を $\overline{T}$ とすると、

$\overline{T} = \int_0^\infty P(t)dt$　となる。

このことは次のようにして確かめられる。

t 期間継続する確率 $P(t)$ とは、失業発生時を時点０として時点 t で失業が続いているものの割合となる。すなわち、失業の終了の確率密度関数を $f(t)$ とすれば、時点 T までに失業が終了する累積確率 $Pob(t \le T)$ は

$Pob(t \le T) = \int_0^T f(t)dt$　で与えられる。

この時　$\dfrac{dPob(t \le T)}{dT} = f(T)$ となり、$\overline{T}$ は $\overline{T} = \int_0^\infty tf(t)dt$ となる。

（期待値の定義！）

また、

$P(T) = 1 - Pob(t \le T) = 1 - \int_0^T f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt - \int_0^T f(t)dt = \int_T^\infty f(t)dt$

となり

（$\because \int_0^\infty f(t)dt = 1$）

$\dfrac{dP(t)}{dt} = -f(t)$ となる。

$\int_0^\infty P(t)dt = \lim_{S\to\infty} \int_0^S P(t)dt$　であるので $\int_0^S P(t)dt$ について考える。

部分積分すれば

$$\int_0^S P(t)dt = [tP(t)]_0^S - \int_0^S t\frac{dP(t)}{dt}dt = S\int_S^\infty f(t)dt + \int_0^S tf(t)dt$$

ここで積分区間に注意して　$S\int_S^\infty f(t)dt$　を評価すると

（$\overline{T} = \int_0^\infty tf(t)dt$　の収束を仮定して）

$$0 \le S\int_S^\infty f(t)dt \le \int_S^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty tf(t)dt - \int_0^S tf(t)dt \to 0 \quad (S \to \infty)$$

従って、$S \to \infty$　の時　$\int_0^S P(t)dt \to \int_0^\infty tf(t)dt$　となる。

一方、失業からの流出率が一定だとすると、継続失業者からの流出率もそれに等しいという自然な仮定の下で t 時点での継続失業者数を $u(t)$ 、（共通の）流出率を r　とすれば微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t)$$　が成り立つ

これを解けば $u(t) = \exp(-rt)u(0)$ となる。

定義を考えれば $P(t) = \dfrac{u(t)}{u(0)}$　であるので、結局、

$P(t) = \exp(-rt)$　となり、

$$\int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \exp(-rt)dt = \left[-\frac{\exp(-rt)}{r}\right]_0^\infty = \frac{1}{r}$$　となる。

$r = b_{12} + b_{32}$　であったので　$\overline{T} = \dfrac{1}{b_{12} + b_{32}}$　を得る。