

補注 労働投入量のディビジア指数（ユースフル労働統計2016 本文 3.2）

労働投入量のディビジア指数は、賃金率の異なる複数の種類から成る労働全体の労働投入量の動きに関する指数である。それぞれの労働投入量の単純な合計の動きではなく、労働投入量に変化のあった労働の賃金率の高低も反映する動きとなるように作られる¹。

今、労働の種類が n 種類から成るとし、それぞれの賃金率（1人1時間当たりの賃金）を w_1, \dots, w_n 、労働投入量（延べ労働時間数）を L_1, \dots, L_n と置く。本文では、1時間当たりの所定内給与額がここでいう賃金率に相当し、6月1か月間の延べ所定内労働時間数がここでいう労働投入量に相当する。また、本文は、労働をフルタイム労働とパートタイム労働に分け、それぞれをさらに、性、学齢、年齢階級、勤続年数階級の別でグループ分けしているが、これらがここでいう労働の種類である。

（指数の性質）

労働投入量のディビジア指数 D は、次の I と II を満たすように作られる。

- I 労働投入量が 1 単位増えたときのディビジア指数の増分は、労働投入量が増えた労働の賃金率に比例する。記号で書くと、 k を労働の種類として、ディビジア指数の偏微分係数 $\partial D / \partial L_k$ と賃金率 w_k とは、比例定数を $1/\omega$ として、

$$\frac{\partial D}{\partial L_k} = \frac{1}{\omega} w_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{①}$$

の関係にある。比例定数 $1/\omega$ は、労働の種類 k によらない。これは、労働の種類 i と j ($i, j = 1, \dots, n$) の各組合せについて、 D の L_i に関する偏微分係数 $\partial D / \partial L_i$ と、 L_j に関する偏微分係数 $\partial D / \partial L_j$ の比は、賃金率の比 w_i / w_j に等しいということでもある。

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial L_i}}{\frac{\partial D}{\partial L_j}} = \frac{w_i}{w_j} \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{②}$$

たとえば、同じ労働投入量の変化でも、賃金率が倍の労働の種類で生じた場合は、ディビジア指数の変化は 2 倍となる。

- II さらに、 D は L_1, \dots, L_n に関し一次同次である。すなわち、 a を任意の正の実数として、 L_1, \dots, L_n を一斉に a 倍すると、 D も a 倍となる。

$$D(aL_1, \dots, aL_n) = aD(L_1, \dots, L_n)$$

これは、すべての生産要素が一斉に a 倍になれば生産量も a 倍になるという生産関数についてしばしば想定される仮定を、 L_1, \dots, L_n の関数 D にも当てはめたものである。それぞれの労働の種類において、労働投入量が同じ率で増減するとき、言い換えると、労働投入量の構成比が変わらないときは、ディビジア指数の増減率は、労働投入量の増減率と同じということになる。

一次同次の関数は、 a を任意の正の実数として $D(aL_1, \dots, aL_n) = aD(L_1, \dots, L_n)$ であるから、両辺を a で微分し、 a を 1 と置くことで、

¹ この補注は、ユースフル労働統計で作る労働投入量のディビジア指数に関する記述で、ディビジア指数一般についてのものではありません。

本稿は、コースフル2016まで掲載していた「3.2労働の質指標 時系列変化」の指標についてのものです。

$$D(L_1, \dots, L_n) = \frac{\partial D}{\partial L_1} L_1 + \dots + \frac{\partial D}{\partial L_n} L_n \quad \text{③}$$

が成り立つ（一次同次式に関するオイラーの定理）。

等式③の右辺は、①の関係を使うと、

$$D(L_1, \dots, L_n) = \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{\omega} L_k = \frac{C}{\omega} \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{④}$$

ここで C は、 $w_1 L_1 + \dots + w_n L_n$ を C と置いたもので、労働の総賃金コストである。①の比例定数 ω と総賃金コスト C とは、

$$C = \omega D$$

の関係がある。

（増減率）

ここで、各労働の種類 L_1, \dots, L_n が時間の経過とともに変化した場合に、ディビジア指数 $D(L_1, \dots, L_n)$ がどのように変化するかみる。その結果を利用して、各労働の種類における労働投入量の変化から、ⅠとⅡを満たすようなディビジア指数を構成する。

$D(L_1, \dots, L_n)$ の各変数 L_1, \dots, L_n を、時間の経過と共に変化する関数と考え、 $D(L_1, \dots, L_n)$ を t で微分すると、

$$\frac{dD}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial D}{\partial L_k} \cdot \frac{dL_k}{dt}$$

(w_1, \dots, w_n は時点 t の関数とは考えない) となる。①と④を使って右辺を変形する。

$$\frac{dD}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial D}{\partial L_k} \cdot \frac{dL_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{\omega} \cdot \frac{dL_k}{dt} = D \sum_{k=1}^n \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{dL_k}{dt} / L_k$$

すなわち

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} = \sum_{k=1}^n \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\frac{dL_k}{dt}}{L_k} \quad \text{⑤}$$

となる。

これは、ディビジア指数 $D(L_1, \dots, L_n)$ の満たすべき時点 t に関する微分方程式となっている。左辺はディビジア指数の増減率に相当する。右辺の $(dL_k/dt)/L_k$ は、労働の種類 k の労働投入量 L_k ($k=1, \dots, n$) の増減率である。ディビジア指数は、各労働の種類 k の労働投入量の増減率 $(dL_k/dt)/L_k$ ($k=1, \dots, n$) を、当該労働の種類 k の賃金コスト $w_k L_k$ が総賃金コスト $C = w_1 L_1 + \dots + w_n L_n$ に占める割合で加重平均したもので増減することを、この⑤式は示している。

この⑤式を利用して、ディビジア指数を作成する。

（単純な労働投入量との関係）

次に、ディビジア指数の増減率と、各労働の種類 k の労働投入量の単純な合計の増減率との関係を見る。

労働投入量の単純な合計を L 、各労働の種類別の労働投入量の構成比を b_k と置く。

$$L = L_1 + \dots + L_n \quad L_k = Lb_k$$

である。 $L_k = Lb_k$ の両辺を t で微分すると、

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{dL}{dt} b_k + L \frac{db_k}{dt}$$

これを⑤の右辺に代入する。 $L_k = Lb_k$ であること、 $C = w_1 L_1 + \dots + w_n L_n$ で、

$$\sum_{k=1}^n \frac{w_k L_k}{C} = 1$$

であることに注意して整理すると、⑤は次のとおりとなる。

$$\frac{dD}{D} = \sum_{k=1}^n \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{db_k/dt}{b_k} + \frac{dL}{L} \quad \text{⑥}$$

この式から、ディビジア指数の増減率は、次の二つの合計であることがわかる。

- i 右辺第1項 各労働の種類別の構成比の増減率 $(db_k/dt)/b_k$ を、当該労働の種類別の賃金コストの総賃金コストに占める割合 $w_k L_k/C$ で加重平均したもの
- ii 右辺第2項 労働投入量の単純な合計 L の増減率

i が、ディビジア指数の増減率と、労働投入の単純な合計 L の増減率との差で、本文で「労働の質の変化率」と呼ぶ部分に相当する。

(賃金率の高低との関係)

ディビジア指数の増減率と、各労働の種類別の賃金率 w_1, \dots, w_n の高低との関係がわかるように、この⑥式をさらに変更する。賃金率 w_1, \dots, w_n の加重平均を w と置く。全労働者の平均賃金率である。

$$w = (w_1 L_1 + \dots + w_n L_n) / (L_1 + \dots + L_n)$$

であって、総賃金コスト C や労働投入の単純な合計 L との間には、

$$w = \frac{C}{L} \quad C = wL$$

という関係にある。

構成比 b_1, \dots, b_n は合計 1 であるから、各構成比を時点 t で微分した微分係数の合計は 0 であること、すなわち、

$$\frac{db_1}{dt} + \dots + \frac{db_n}{dt} = 0$$

これと賃金率 w_1, \dots, w_n の加重平均 w を使うと、⑥は次の⑦に変形できる。

$$\frac{dD}{D} = \sum_{k=1}^n \frac{(w_k - w)L_k}{C} \cdot \frac{db_k/dt}{b_k} + \frac{dL}{L} \quad \text{⑦}$$

これから、右辺第1項の正負、つまり労働の質の変化率と呼ぶものの正負は、各労働の種類別の賃金率 w_k と

全体の平均賃金率 w の大小関係や、労働の投入量の構成比の増減率 $(db_k/dt)/b_k$ の大きさなどによって決まることがわかる。特に、

- ・賃金率 w_k が全体の平均 w より高い労働の労働投入量の構成比が上昇 ($db_k/dt > 0$) し、
- ・賃金率 w_k が全体の平均 w より低い労働の労働投入量の構成比が低下 ($db_k/dt < 0$) するとき、

右辺の第1項が正となり、労働の質の変化率と呼ぶ値が正で、労働の質が上昇することがわかる。

また、賃金率が労働の種類に依らない、つまり各 k で $w_k = w$ のときは、右辺第1項は0で、ディビジア指数の増減率は労働投入量全体の増減率と同じとなることもわかる。

(実際の計算)

実際の計算に用いる資料は、賃金構造基本統計調査等による一般労働者と短時間労働者の統計である。労働投入量は6月分の延べ所定内労働時間数、賃金率は6月分の時間当たり所定内給与額である。

⑤又は⑥のような時点 t の微分方程式を、1年に1回の特定月の統計に当てはめなくてはならない。

t を年単位の連続変数と考え、⑤を時点 t 年から $t+1$ 年まで積分する。

$$\int^{+1} \frac{dD}{D} dt = \sum_{k=1}^n \int^{+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{dL_k}{L_k} dt$$

$$\ln(D(t+1)) - \ln(D(t)) = \sum_{k=1}^n \int_t^{+1} \frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{\partial L_k}{L_k} dt \quad \text{⑧}$$

ここで \ln は自然対数関数である。

右辺の Σ の中の各項は、積分形の平均値の定理から、0以上1以下のある θ_k があつて、 $t + \theta_k$ における

$$\frac{w_k L_k}{C} \cdot \frac{dL_k}{L_k}$$

の値に等しいが、これを、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w_k L_k}{C} (t+1) + \frac{w_k L_k}{C} (t) \right) \times (\ln(L_k(t+1)) - \ln(L_k(t)))$$

で近似することにする。すなわち、各労働の種類

賃金コストの割合の前年との平均×労働投入量の対数値の前年差の合計を、ディビジア指数の対数値の前年差とする。賃金コストの割合の前年との平均をウェイトとした、各労働の種類労働投入量の対数値の前年差の加重平均である。賃金率 w_1, \dots, w_n は、時点 t の関数ではないとして⑤を導いたが、年間の変化を近似的に求めるこの計算過程で、賃金コストの割合の経年変化からも影響を受けることになる。

最後に、ディビジア指数の対数値の前年差に指数関数を施して増減率とし、特定年(2000年)を100として、その増減率を累積したものが、各年のディビジア指数である。