固定効果と変量効果

奥井　　亮
（京都大学准教授）

Ⅰ　はじめに

固定効果と変量効果は「似て非なるもの」である。両者ともパネルデータを用いた統計分析で出てくる概念であり，個人ごとに異なるが時間を通じて一定であるものを意味し，統計モデルの上では同じ数式で表すことができる。二つの違いは，固定効果は説明変数と相関しているのに対し，変量効果は説明変数との相関はないことである。しかし，そうした同じ数式で表現できているものが，固定効果か変量効果かによって，全く異なる実証分析上の状況や問題を意味し，また推定法などの分析手法も異なったものを使用することになる。特に固定効果という概念は重要で，そもそもなぜパネルデータを用いた分析が有用であることを理解することは，固定効果という概念を理解することと深く関連している。

なお，本文はテーマの性質上，計量経済学を少しは学ばれた方を読者と想定している。

Ⅱ　パネルデータ

固定効果と変量効果の議論を行う前に，これらの概念が登場する設定を手短に紹介しよう。まず，パネルデータとはどのようなデータであるかを解説する。そして，ある変数から他の変数への影響を調べるために使用される単回帰モデルを簡単に解説し，単回帰モデルの最小二乗推定の正当性を与える条件を見ていく。

パネルデータとは，複数の観測個体を複数の時点にわたって観測することで得られたデータである。労働に関する例でいうと，例えば，多くの人の賃金を複数年にわたって観測したデータが，パネルデータに当たる。数式で表現する際には，$\{\{y_{it}\}_{t=1}^{T}\}_{i=1}^{N}$ の様に，添え字を二つ使い，i が観測個体を t が時点を表し，データは N 個の観測個体の T 個の時点に渡る y_{it} の値を含んでいることになる。賃金の例では，y_{it} はデータにおける i 番目の人の t 時点での賃金の数値であり，N 人の T 時点に渡る賃金がデータに含まれると言うことである。

パネルデータを用いた統計分析には様々なものがあるが，ここでは最も基本的な単回帰モデルによる分析を考える。$\{\{(y_{it}, x_{it})\}_{t=1}^{T}\}_{i=1}^{N}$ という二つの変数からなるパネルデータがあるとし，我々が興味があるのは x_{it} が y_{it} に与える影響であるとする。例えば，y_{it} が賃金で x_{it} は労働組合に参加しているかどうかを表すダミー変数（個人 i が t 時点で労働組合に参加していれば $x_{it}=1$ で参加していないなら $x_{it}=0$）で，労働組合に参加していることが賃金にどのような影響を及ぼすかに興味がある場合が考えられる。x_{it} の y_{it} への影響を分析するために，

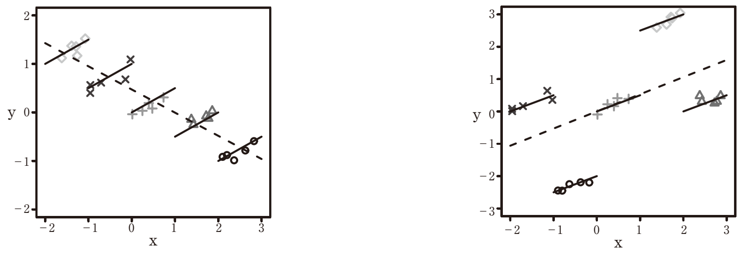
$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$

という y_{it} を被説明変数とし x_{it} を説明変数とした単回帰モデルを用いて y_{it} と x_{it} の関係をモデル化する。ただし，α と β は未知の係数であり，u_{it} は誤差項とよばれ y_{it} を決める x_{it} 以外の要因を全て含んだ物である。このモデルでは，β によって x_{it} の y_{it} への影響が表現されている。この設定ではデータを用いて β の値を推定することが，統計分析の目的となる。

単回帰モデルを最小二乗推定するための条件を次に見ていく。ここではパネルデータを用いて β の値を推定することになる。単回帰モデルの最も基本的な推定量は，最小二乗推定量であり，それは，

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - a - bx_{it})^2$$

を a と b について最小化し，その最小値をもたらす b の値を β の推定量とする物である。この最小二乗推定量によって β の値が推定されるということを正当化するためには，x_{it} と u_{it} の間に関係がないということが必要になる。数学的には $E(u_{it}|x_{it})=0$ と x_{it} で条件付けた u_{it} の期待値が 0 である（つまり u_{it} がどのような値をとるかは x_{it} の値とは平均的に無関係である）という仮定を使用することが多い。もし，この仮定がないと，最小二乗推定は x_{it} の効果だけでなく u_{it} を構成する x_{it} と関連のある要素の効果も混ぜ合わせて推定してしまい x_{it} の効果の計測にはなっていないのである。賃金と労働組合の関係でみると，これは賃金を決める労働組合以外の要素は労働組合に参加することとは無関係であるという仮定が必要になると言うことである。例えば，職種や学歴などは賃金に影響を与える要因で u_{it} を構成する要素だと考えられる。つまり，最小二乗推定を正当化するためには，労働組合に参加す



(a) 固定効果の場合　　　(b) 変量効果の場合

図：固定効果と変量効果：N =5，T =5 の場合の散布図である。同じ記号で表される点が同一の観測個体からの観測値である。真の関係は y_{it} = $0.5x_{it}$ + γ_i + ε_{it} である，実線は y =$0.5x$ + γ_i であり点線は最小二乗法で推定した回帰線である。

るかどうかは，職種や学歴とは関係がないと仮定する必要がある。しかし，これは非現実的な仮定ではないだろうか。一方で，この仮定がないと，最小二乗推定は労働組合の効果だけでなく労働組合と関連する他の要素の効果を合わせた物を労働組合の効果として誤って推定してしまうことになるのである。

この問題は欠落変数バイアスと呼ばれ，計量経済学において最も重要な問題といってもよいであろう。計量経済学では欠落変数のバイアスを回避するために多くの手法が開発されてきた。重回帰や操作変数法などはその代表的なものであるが，これらの手法は追加的な変数がデータで使用可能であるという制約がある。パネルデータを用いることの一つの利点は，追加的な変数を観測することなしに，欠落変数バイアスを回避する一つの方法が存在するということである。特に固定効果という概念は，欠落変数バイアスの回避策としてのパネルデータの利用という側面と深く関わっている。

Ⅲ　固定効果と変量効果

それでは，いよいよ本論の主題である固定効果と変量効果について解説しよう。固定効果は先ほど述べた欠落変数バイアスの問題と絡めて紹介する。変量効果については，固定効果の違いと，変量効果の場合の推定量について解説する。

固定効果も変量効果も，被説明変数 y_{it} に影響を与える，時間を通じて一定な要素をまとめた物である。誤差項 u_{it} を

$$u_{it} = \gamma_i + \varepsilon_{it}$$

と時間を通じて一定な γ_i と時間とともに変化する ε_{it} の二つに分けて書く。このうち γ_i は個別効果や個人効果と呼ばれる。γ_i が x_{it} と相関していれば固定効果と呼ばれ，相関がなければ変量効果と呼ばれる。回帰式においては，

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + \gamma_i + \varepsilon_{it}$$

となる。上の二つの図は，固定効果の場合，変量効果の場合，それぞれの y_{it} と x_{it} の散布図である。固定効果の場合は，x_{it} と固定効果（この場合は各観測個体ごとに異なる切片 ）と相関しているため，最小二乗推定では，真の関係とは逆に負の関係が推定されている。一方，変量効果の場合には，観測個体ごとに切片は異なるものの，x_{it} とは相関がないため，最小二乗推定は適切なものとなっている。

固定効果の場合は，誤差項と説明変数の相関があるので最小二乗推定は不適切であるが，固定効果推定とよばれる手法によって，β の推定を行うことができる。固定効果の場合は，$\mu_i = \alpha + \gamma_i$ とまとめて，

$$y_{it} = \beta x_{it} + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

と書くのが便利である。固定効果推定の基本的な発想は，変数変換によって μ_i をモデルから消し去ることにある。まず，$\bar{y}_i = \sum_{t=1}^{T} y_{it}/T$ $\bar{x}_i = \sum_{t=1}^{T} x_{it}/T$ $\bar{\varepsilon}_i = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}/T$ とすると，

$$\bar{y}_i = \beta \bar{x}_i + \mu_i + \bar{\varepsilon}_i$$

となる。各変数から，観測単位ごとの標本平均の値を引くと

$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta\,(x_{it} - \bar{x}_i) + \varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i$$

となる。この変換を固定効果変換と呼び，この変換によって μ_i がモデルから消えることがわかる。したがって，もし，誤差項のうち説明変数との相関をもたらしていたものが固定効果だけで，時間とともに変化する部分は説明変数との相関がないとすると，$y_{it} - \bar{y}_i$ を $x_{it} - \bar{x}_i$ に回帰する最小二乗推定をすれば，β の適切な推定量を得ることができる。この推定法を固定効果推定と呼ぶ。

固定効果推定の重要な点は，欠落変数バイアスを追加的な変数を観測することなしに避けることができる

点にある。必要な仮定は，欠落変数バイアスをもたらす要素は，時間を通じて一定であると言うことである。もちろん，この仮定は常に成り立つわけではなく，上の式の ε_{it} が x_{it} と相関している状況も考えられる。しかし，欠落変数バイアスの問題は経済学などの社会科学における実証分析では重要な課題であり，この問題をたとえ部分的にしろ避けることが可能であるというのは，パネルデータを使用する大きな利点と考えられる。まさしく，この点がパネルデータを使用した分析が説得力を持ち，広く実証研究で使用されている理由である。

一方，変量効果の場合は，通常の最小二乗推定の仮定を満たすことができ，パネルデータを使用する特別な利点は，特にない。パネルデータを使用していることを意識せずに，最小二乗推定によって β の推定を行えばよい。ただし，$t \neq s$ の時でも，u_{it} は u_{is} とは相関しているので，通常の最小二乗推定量の標準誤差ではなく，誤差項間の相関に頑健な標準誤差を使用する必要がある（なお，固定効果推定でも標準誤差は誤差項間の相関に頑健な標準誤差を使用するべきである。固定効果変換しても相関が完全に消えるわけではない）。

なお変量効果の場合には，さらに仮定を加えることで，変量効果推定量と呼ばれる分散の小さい推定量を使用することも可能である。γ_i を平均 0 で分散 σ_{γ}^2，ε_{it} を平均 0 で σ_{ε}^2 で自己相関がない（つまり $t \neq s$ なら ε_{it} と ε_{is} には相関がない），また γ_i と ε_{it} は無相関と仮定する。$\theta = 1-(\sigma_{\varepsilon}^2/(\sigma_{\varepsilon}^2 + T\sigma_{\gamma}^2))^{1/2}$ として，$y_{it} - \theta\bar{y}_i$ の様に変数を変換すると変換後の変数は，

$$y_{it} - \theta y_i = \alpha(1-\theta) + \beta(x_{it} - \theta\bar{x}_i) + \gamma_i(1-\theta) + \varepsilon_{it} - \theta\bar{\varepsilon}_i$$

を満たす。このモデルの誤差項 $\tilde{u}_{it} = \gamma_i(1-\theta) + \varepsilon_{it} - \theta\bar{\varepsilon}_i$ は自己相関はなく $t \neq s$ であれば，$E(\tilde{u}_{it}\tilde{u}_{is})=0$ であり，また分散も均一である。このように変換されたモデルを最小二乗推定することで，β の推定量を得ることができ，またこれは最も分散の小さい有効な推定量であることも示すことができる。この推定量を変量効果推定量と呼ぶ。もちろん，実際には，σ_{γ}^2 や σ_{ε}^2 の値は分からないので，はじめに通常の最小二乗推定を行い，その残差からこれらの分散の値を推定して，変量効果推定を行うことになる。

固定効果と変量効果という名称について補足しておく。固定効果とは説明変数と相関しているという意味なので，別段「固定」されているわけでもない。にもかかわらず固定効果という名称が与えられたのは，歴史的な背景による。パネルデータ分析の初期の頃には，観測できないが時間を通じて一定な要素を，それが母数の一部で固定されている場合には固定効果，乱数の場合には変量効果と呼んでいた。つまり，その時代にはこうした名称は自然なものであった。また，固定効果推定や変量効果推定は，このような歴史的な背景を元に生まれた。しかし，計量経済学の問題意識が変化して行くにつれて，母数の一部であるか乱数であるかといった問題は重要なものではなくなり，また数学的な扱いやすさから全て乱数で考えるようになった。一方で，固定効果推定は，個別効果が説明変数と相関しているときでも機能し，変量効果推定を正当化するには，少なくとも個別効果は説明変数とは無関係であるという仮定が必要になることも理解されてきた。この様な経緯で，固定効果も変量効果も両方とも確率変数であるにも関わらず，説明変数との相関の有無によって異なる名称を持つこととなったのである。なお，歴史的背景から，現代における固定効果のことを，説明変数と相関をもつ変量効果，と述べている文献も存在する。

Ⅳ　固定効果か変量効果か

最後に，パネルデータ分析をする場合には，固定効果と変量効果のどちらを用いてモデル化すればよいのだろうか。当然のことながら，研究対象によっては変量効果でモデル化できる場合もあれば，固定効果とした方がより適切な場合もあり，これは実証研究のデザインがどうなっているかに依存する。しかし，一般論としては固定効果としてモデル化した方が適切であると，筆者は考える。とはいえ，モデルが複雑化するにつれ，固定効果としてモデル化することが困難な場合もある。

なぜ，固定効果としてモデル化した方が適切であると考えるかというと，主に二つの理由がある。一つは変量効果であっても固定効果として分析する手法は適用可能であることであり，もう一つは経済学などの社会科学の実証分析では変量効果の仮定である説明変数との無相関という仮定は満たされないことが通常だからである。固定効果推定量が，変量効果の場合でも望ましい統計的性質を持つことは，すぐに分かると思う。固定効果推定量は個別効果を消すことで得られる推定量であるため，個別効果はどのようなものであってもよく，変量効果だからといって，その性質は変化しない。また，個別効果とは時間を通じて変化しない属性をまとめたものであるので，こうした属性はその個体の時間を通じて変化する属性とも関連しているというのが，社会科学では自然な発想であろう。実際，パネルデータ分析が非常に盛んになった背景には，時間を

通じて一定な属性によって引き起こされる欠落変数バイアスを回避できるという面が，魅力的であったからである。

なお，固定効果か変量効果かは，データから統計的に判別できる問題ではある。しかし筆者は固定効果か変量効果かと統計的検定によって判断し，その結果に基づいてどちらかを選んで分析するというやり方は薦めない。固定効果と変量効果の判別は，いわゆるハウスマン検定を用いて行うことができる。固定効果推定量は固定効果か変量効果かに関わらず，適切な推定量である。一方，変量効果推定量は変量効果の場合にのみ適切な推定量であり，固定効果であればバイアスを伴う推定量になる。そのため，もし変量効果の場合には，これら二つの推定量は同じような値を取るが，固定効果の場合には大きく異なる値を取るはずである。そこで，固定効果推定量と変量効果推定量の値を比較し，それらが近い値であれば変量効果であり，大きく異なる値であれば固定効果と判断することができる。そして，変量効果が支持されれば変量効果推定量を，固定効果が支持されれば固定効果推定量を使って分析を行うという物である。通常は変量効果推定量の方が分散が小さいので，変量効果推定量の方が明確な結果が出やすく，変量効果推定量が使えるならそちらを使用したいので，こうした検定を用いて変量効果推定量の仕様を正当化するというのが主な使い方であろう。こうした二つの推定量の値を比較することで検定を行う手法をハウスマン検定という。しかし，この手法には問題点がある。ハウスマン検定は統計的検定であるので，常に正しい判断を下す訳ではない。ある確率で誤った判断を下す。特に問題になるのは，本当は固定効果なのに誤って変量効果としてしまうことである。そのため，本来は適切でない変量効果推定量に基づいて分析をしてしまい，例えば本来は効果がないのに効果が統計的に有意に出た，と報告してしまうという危険がある。 Guggenberger（2010, *Journal of Econometrics*, 156, 337–343）はこの問題を理論的に示している。

ただ場合によっては，固定効果としてモデル化することが困難な場合もある。例としては非線形モデルの場合があげられる。線型モデルの場合には，簡単な操作によって固定効果を消去することができた。しかし非線形モデルの場合には，そうした固定効果を消去する操作は不明であったり，あるいは存在しない場合もある。たとえば，y_{it} が２項変数で固定効果を含んだプロビットモデルで記述されている場合を考える。つまり，

$$\Pr(y_{it}=1|x_{it}, \mu_i) = \Phi(x_{it}\beta + \mu_i)$$

となっている場合である。ただしΦは標準正規分布関数である。この場合には固定効果を消去する方法はないことが，Chamberlain（2010, *Econometrica* 78(1), 159–168）によって証明されている（実はロジットモデルなら消去できる）。なお，T が十分に大きい場合には，固定効果のままでも推定が可能になることが近年の研究で判明している。しかし，T がそれほど大きくないデータを使う場合には，こうしたモデルでは変量効果を使用せざるをえない。その場合でも $\mu_i = \bar{x}_i\pi + \eta_i$ などとして，x_{it} と相関している部分をできるだけモデル化した上で，η_i の部分を新しく変量効果の乱数部分として分析することが望ましい。

変量効果の仮定に依存せざるを得ない状況は他にも，時間を通じて一定な説明変数の影響を知りたい場合がある。この場合は，固定効果推定では，時間を通じて一定な説明変数は固定効果を消すときに同時に消えてしまい，その影響を測定することはできない。そのため，変量効果モデルを使わざるをえない。しかし，この場合でも，時間を通じて一定な説明変数は個別効果と無相関だが，他の変数は個別効果との相関を許すという，固定効果と変量効果の中間的なやり方での分析は可能であり，できるだけ欠落変数バイアスを回避するための工夫を行った分析を心がけるべきであろう。

Ｖ 結び

この文章では，固定効果と変量効果の違いについて解説した。両者ともパネルデータを用いた統計モデルにおける時間を通じて一定な観測できない要素を表現している。しかし，固定効果は説明変数と相関がある場合で，変量効果は説明変数と相関がない場合である。また使用すべき統計手法も固定効果か変量効果かで異なってくる。筆者は，固定効果推定が可能な状況であれば，時間を通じて一定な観測できない要素は固定効果と考えるべきであると，考える。いずれにしても，固定効果と変量効果の違いと認識し，変量効果しか使えない場合でも，どのような仮定が変量効果には隠れているのかに注意を払うことは実証分析を行う上でも実証分析の結果を評価する上でも重要な視点となろう。

おくい・りょう　京都大学経済研究所准教授。最近の主な著作に The Binarized Scoring Rule（with Tanjim Hossain), *Review of Economic Studies*（2013), 80（3): pp.984–1001. 計量経済学専攻。